文章编号:1673-1549(2011)05-0610-04

可换环上严格上三角矩阵代数的拟导子

关　琦, 郑　婷

(中国矿业大学理学院, 江苏　徐州　221008)

摘　要:设 R 为任意的含幺可换环, $N_n(R)$ 为 R 上所有上三角矩阵组成的结合 R - 代数,对于 $N_n(R)$ 上的线性变换 φ, 若存在线性变换 $\bar{\varphi}$ 使得对任意 $x,y \in R$ 均有 $\bar{\varphi}(xy) = \varphi(x)y + x\varphi(y)$, 则称 φ 为 $N_n(R)$ 上的拟导子。文章给出了 $N_n(R)$ 上任一拟导子的具体形式,对导子的概念进行了推广。

关键词:严格上三角矩阵代数;导子;拟导子;可换环

中图分类号:O151.2　　　　**文献标识码**:A

引　言

Lege 和 Luks 在文献[1]中首次引入了李代数上拟导子的概念,设 L 为李代数, $\varphi \in Hom(L,L)$, 若存在 $\bar{\varphi} \in Hom(L,L)$, 对任意的 $x,y \in L$ 都有

$$\bar{\varphi}([x,y]) = [\varphi(x),y] + [x,\varphi(y)]$$

则称 φ 为 L 上的拟导子。且 Lege 和 Luks 完全决定了域上由权空间张成的一类李代数。文献[2]决定了可换半环上上三角矩阵代数自同构的具体形式。文献[3-6]中给出了可换环上一类代数的导子和若当导子的具体形式。李娜娜,文献[7]决定了全矩阵代数上的拟导子。本文研究严格上三角矩阵代数上的拟导子,给出了可换环 R 上严格上三角矩阵代数 $N_n(R)$ 上任一拟导子的具体形式,彻底推广了文献[4]的结论。

定义 1　设 R 为任意的含幺可换环, A 为 R 上的代数。φ 为 A 上的映射,若存在线性映射 $\bar{\varphi}:A \to A$ 对任意的 $a,b \in A$, 均有 $\bar{\varphi}(ab) = \varphi(a)b + a\varphi(b)$, 则称 φ 为 A 上的拟导子。

显然,若 φ 为 A 上的导子,则 φ 一定为 A 上的拟导子,可见拟导子是导子概念的推广。但反过来,若 φ 是 A 上的拟导子,那么若 φ 是 A 上的导子吗? 以下例子给出了否定的答案。

例 1　纯量映射 存在 $a \in R$, 定义映射

$$\varphi_a: N_n(R) \to N_n(R), x \mapsto ax$$

取 $\bar{\varphi} = 2\varphi_a$, 则由拟导子的定义容易得出 φ_a 是一个拟导子,当且仅当 $a = 0$ 时它是导子。

1　$N_n(R)$ 的标准拟导子

首先介绍本文中将用到的一些记号。设 R 为含幺可换环, n 为任意正整数。用 $M_n(R)(N_n(R))D_n(R))$ 表示 R 上所有 $n \times n$ 矩阵(严格上三角矩阵,对角矩阵)组成的代数。对任意的 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $E_{ij} \in M_n(R)$ 表示只有 (i,j) 分量是 1, 其余分量全为 0 的 n 阶方阵。对任意的 $x \in N_n(R)$, 可写 $x = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_{ij}E_{ij}$, 其中 $a_{ij} \in R$。令

$$\alpha_i = \sum_{l=i+1}^{n} RE_{il}, i = 1,2,\cdots,n-1$$

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{j-1} RE_{kj}, j = 2,3,\cdots,n$$

构造 $N_n(R)$ 的几个标准拟导子:

(1) 内导子: 若 $x \in N_n(R)$, 那么映射 $adx: N_n(R) \to N_n(R), y \mapsto [x,y]$ 是由 x 诱导的 $N_n(R)$ 的一个导子,称它为内导子。

(2) 对角导子: 若 $h \in D_n(R)$, 定义映射 $D_h: N_n(R) \to N_n(R), y \mapsto [h,y]$, 则它是由 h 诱导的 $N_n(R)$ 的一个导子,称它为对角导子。

(3) 中心拟导:设 $n \geqslant 3$, 设

$$y = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} y_{ij}E_{ij} \in N_3(R)$$

定义映射

$$\eta_y: N_n(R) \to N_n(R)$$

收稿日期:2011-09-03

作者简介:关 琦(1987-),女,安徽宿州人,硕士生,主要从事代数学及其应用方面的研究,(E-mail)yingzitong@163.com

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}E_{ij} \mapsto (\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}y_{ij})E_{1n}$$

易证这是 $N_n(R)$ 的拟导子,称它为中心拟导子。一般地,η_y 不是 $N_n(R)$ 的导子,当且仅当 $y=0$ 时它为导子。

(4)可扩的拟导子:设 $f\in R$, 定义映射

$$\lambda_f: N_n(R)\to N_n(R)$$

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{ij}E_{ij} \mapsto \sum_{k=1}^{n-1} f(k-1)(\sum_{j-i=k} a_{ij}E_{ij})$$

易证当取 $\lambda_f = \lambda_f + \varphi_f$(其中 φ_f 为例 1 中的纯量映射)时,λ_f 是 $N_n(R)$ 的一个拟导子,我们称它为可扩的拟导子,当且仅当 $f=0$ 时 λ_f 是导子。利用上面构造的这些标准的拟导子,刻划 $N_n(R)$ 的任意拟导子。

定理 1 设 R 是任意的含幺可换环,$N_n(R)$ 为 R 上的严格上三角矩阵组成的代数,φ 是 $N_n(R)$ 上的线性变换,则 φ 是 $N_n(R)$ 的拟导子,当且仅当

(1) $n=3$ 时,$\varphi = \eta_y + D_h$。

(2) $n\geqslant 4$ 时,$\varphi = \eta_y + D_h + adx + \lambda_f$。

其中 $adx, D_h, \eta_y, \lambda_f$ 分别为 $N_n(R)$ 的内导子,对角导子,中心拟导子,可扩的拟导子。

2　引理及定理的证明

引理 1 令 $M_n = RE_{1n} = \{rE_{1n} \mid r\in R\}$。若 φ 是 $N_n(R)$ 的拟导子,则 $\varphi(M_n)\subseteq M_n$。

证明 设 φ 是 $N_n(R)$ 的拟导子,对任意的 $x\in N_n(R)$ 均有 $xE_{1n} = E_{1n}x = 0$,由拟导子定义可知:

$$0 = \bar{\varphi}(xE_{1n}) = \varphi(x)E_{1n} + x\varphi(E_{1n})$$

$$0 = \bar{\varphi}(E_{1n}x) = \varphi(E_{1n})x + E_{1n}\varphi(x)$$

由于 $\varphi(x)E_{1n} = E_{1n}\varphi(x) = 0$,可得 $x\varphi(E_{1n}) = \varphi(E_{1n})x = 0$。由于 x 的任意性,可知 $\varphi(E_{1n})$ 为 $N_n(R)$ 的中心元,即 $\varphi(E_{1n})\in M_n$。从而 $\varphi(M_n)\subseteq M_n$ 得证。

引理 2 设 φ 是 $N_n(R)$ 的任一拟导子,则有以下结论成立:

(1) $\varphi(\alpha_1)\subseteq\alpha_1$ 且 $\varphi(E_{1j})\in I_j$, $j=2,3,\cdots,n$, 其中 $I_j = \sum_{l\geqslant j} RE_{1l}$。

(2) $\varphi(\beta_n)\subseteq\beta_n$ 且 $\varphi(E_{in})\in K_i$, $i=1,2,\cdots,n-1$, 其中 $K_i = \sum_{k=1}^{i} RE_{kn}$。

证明 (1)当 $1<i<n, i\neq j$ 时,有

$$E_{i,i+1}E_{1j} = E_{1j}E_{i,i+1} = 0$$

由拟导子的定义得:

$$\varphi(E_{i,i+1})E_{1j} + E_{i,i+1}\varphi(E_{1j}) = 0 \tag{1}$$

$$\varphi(E_{1j})E_{i,i+1} + E_{1j}\varphi(E_{i,i+1}) = 0 \tag{2}$$

考虑(1)式,由于 $\varphi(E_{i,i+1})E_{1j}=0$, 故 $E_{i,i+1}\varphi(E_{1j})=0$。这说明 $\varphi(E_{1j})$ 的第 $i+1$ 行全为 0,所以 $\varphi(E_{1j})\in\alpha_1+\alpha_2+\alpha_{j+1}$。

考虑(2)式左边的第 $i+1$ 列元知 $\varphi(E_{1j})$ 的第 i 列元除 $(1,i)$ 位置外均为 0, 所以

$$\varphi(E_{1j})\in\alpha_1 + RE_{2j} + RE_{2n} + RE_{j+1,n}$$

由 $E_{12}E_{1j}=0$, 根据拟导子的定义有 $\varphi(E_{12})E_{1j} + E_{12}\varphi(E_{1j}) = 0$, 可得出 $\varphi(E_{1j})$ 的 $(2,j)$ 和 $(2,n)$ 位置也为 0, 设 $\varphi(E_{1j})\equiv a_{j+1,n}E_{j+1,n}(\mathrm{mod}\alpha_1)$, $2\leqslant j<n$。

由 $E_{1,j+1}E_{1j}=0$, 可得

$$\varphi(E_{1,j+1})E_{1j} + E_{1,j+1}\varphi(E_{1j}) = 0$$

从而有 $a_{j+1,n}=0$, 即 $\varphi(E_{1j})\subseteq\alpha_1$。

由引理 2 知要证

$$\varphi(E_{1j})\in I_j,\ j=2,3,\cdots,n$$

只需考虑当 $3\leqslant j\leqslant n-1$ 的情形。不妨设 $2\leqslant k\leqslant j-1$, 由 $E_{1j}E_{kj}=0$, 据拟导子定义有 $\varphi(E_{1j})E_{kj}+E_{1j}\varphi(E_{kj})=0$, 从而得出 $\varphi(E_{1j})$ 的 $(1,k)$ 位置均为 0, 所以 $\varphi(E_{1j})\in I_j$。

(2)当 $i=1$ 时,由引理 2 易得。下面考虑 $i>1$ 的情形:

当 $1\leqslant j<n-1, j+1\neq i$ 时,由

$$E_{in}E_{j,j+1} = E_{j,j+1}E_{in} = 0$$

知:

$$\varphi(E_{in})E_{j,j+1} + E_{in}\varphi(E_{j,j+1}) = 0 \tag{3}$$

$$\varphi(E_{j,j+1})E_{in} + E_{j,j+1}\varphi(E_{in}) = 0 \tag{4}$$

考虑(3)式知 $\varphi(E_{in})$ 的第 j 列全为 0, 所以 $\varphi(E_{in})\in\beta_{i-1}+\beta_{n-1}+\beta_n$。考虑(4)式左边的 j 行元素可知 $\varphi(E_{in})$ 的第 $j+1$ 行除 $(j+1,n)$ 位置外均为 0, 所以

$$\varphi(E_{in})\in RE_{1,i-1} + RE_{1,n-1} + RE_{i,n-1} + \beta_n$$

由于 $E_{in}E_{n-1,n}=0$, 据拟导子定义可得 $\varphi(E_{in})E_{n-1,n} + E_{in}\varphi(E_{n-1,n}) = 0$, 从而可知 $\varphi(E_{in})$ 的 $(1,n-1)$ 和 $(i,n-1)$ 也均为 0。因此可设

$$\varphi(E_{in})\equiv a_{1,i-1}E_{1,i-1}(\mathrm{mod}\beta_n),\ 1\leqslant i\leqslant n-1$$

由 $E_{in}E_{i-1,n}=0$ 易得 $a_{1,i-1}=0$。即

$$\varphi(E_{in})\in\beta_n,\ i=1,2,\cdots,n-1$$

要证 $\varphi(E_{in})\in K_i$, $i=1,2,\cdots,n-1$, 由以上证明只需考虑 $1<i\leqslant n-2$ 的情况即可。假设 $i+1\leqslant k\leqslant n-1$, 由 $E_{ik}E_{in}=0$ 得 $\varphi(E_{in})$ 的 (k,n) 位置均为 0, 从而 $\varphi(E_{in})\in K_i$。

定理 2 设 $n=3$, 则 φ 是 $N_n(R)$ 的任一拟导子,当且仅当 $\varphi=\eta_y+D_h$, 其中 η_y 和 D_h 分别为 $N_n(R)$ 上的中心拟导子和对角导子。

证明 由引理 1 和引理 2 的证明

$$\varphi(E_{12})\in RE_{12}+RE_{13}$$

$$\varphi(E_{13})\in RE_{13}$$

$$\varphi(E_{23})\in RE_{23}+RE_{13}$$

设

$$\varphi(E_{12})\equiv a_{12}E_{12}(\mathrm{mod}RE_{13})\varphi(E_{23})\equiv a_{23}E_{23}(\mathrm{mod}RE_{13})$$

令

$$h = diag\{0, -a_{12}, -(a_{12}+a_{23})\}$$

则

$$(\varphi - D_h)(E_{12}) \in RE_{13}(\varphi - D_h)(E_{23}) \in RE_{13}$$

因此不妨设

$$(\varphi - D_h)(E_{12}) = b_{12}E_{13}$$

$$(\varphi - D_h)(E_{13}) = b_{13}E_{13}$$

$$(\varphi - D_h)(E_{23}) = b_{23}E_{13}$$

令 $y = b_{12}E_{12} + b_{13}E_{13} + b_{23}E_{23}$, 则有 $(\varphi - D_h - \eta_y)$ 把 $\{E_{12}, E_{13}, E_{23}\}$ 映成 0, 因此有 $\varphi - D_h - \eta_y = 0$, 即 $\varphi = D_h + \eta_y$。

定理 3　设 φ 是 $N_n(R)$ 的任一拟导子,则存在 $\mu \in N_n(R)$ 使得 $(\varphi - ad\mu)(E_{1j}) \in RE_{1j} + RE_{1n}$,其中 $j = 2, 3, \cdots, n$; $(\varphi - ad\mu)(E_{in}) \in RE_{in} + RE_{1n}$,其中 $i = 1, 2, \cdots, n-1$。

证明　当 $n \geqslant 4$ 时,由引理 1 和引理 2 得

$$\varphi(E_{1j}) = \sum_{l=j}^{n} c_{jl}E_{1l}, j = 2, 3, \cdots, n$$

$$\varphi(E_{in}) = \sum_{k=1}^{i} c_{ki}E_{kn}, i = 1, 2, \cdots n-1$$

取 $\mu = -\sum_{p=2}^{n-1}\sum_{q=l+1}^{n} c_{pq}E_{pq}$, 则有

$$(\varphi - ad\mu)(E_{1j}) \equiv$$

$$c_{jj}E_{1j}(\mathrm{mod}RE_{1n})(\varphi - ad\mu)(E_{in}) \equiv c_{ii}E_{in}(\mathrm{mod}RE_{1n})$$

定理 4　记 $\varphi - ad\mu = \varphi_1$。对任意 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 使得 $(\varphi_1 - ad\nu)(E_{ij}) \in RE_{ij} + RE_{1n}$。

证明　首先,证明 $\varphi_1(\alpha_i) \subseteq \alpha_1 + \alpha_i$, 由定理 4 只需考虑 $2 \leqslant i \leqslant n-1$ 的情形。对于任意 $x \in \alpha_i$, 设 $\varphi_1(x) = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} x_{kl}E_{kl}$。当 $p \neq 1$ 且 $p \neq i$ 时,有 $E_{1p}x = 0$, 所以

$$\varphi_1(E_{1p})x + E_{1p}\varphi_1(x) = 0$$

由于 $\varphi_1(E_{1p})x = 0$, 故 $E_{1p}\varphi_1(x) = 0$。即 $\varphi_1(x)$ 的第 p 行均为 0, 从而 $\varphi_1(x) \in \alpha_1 + \alpha_i$。由 x 的任意性,可知

$$\varphi_1(\alpha_i) \in \alpha_1 + \alpha_i, i = 1, 2, \cdots, n-1$$

其次,证明 $\varphi_1(\beta_j) \subseteq \beta_j + \beta_n$, 由定理 4 只需考虑 $2 \leqslant j \leqslant n-1$ 的情形。对任意 $y \in \beta_j$, 设 $\varphi_1(y) = \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} y_{kl}E_{kl}$。当 $q \neq j$ 且 $q \neq n$ 时,有 $yE_{qn} = 0$ 可以得出 $\varphi_1(y)$ 的第 q 列均为 0, 从而 $\varphi_1(y) \in \beta_j + \beta_n$。由 y 的任意性知:

$$\varphi_1(\beta_j) \in \beta_j + \beta_n, j = 2, 3, \cdots, n$$

于是,对任意的 $1 \leqslant i < j \leqslant n, E_{ij} \in \alpha_i \cap \beta_j$, 则

$$\varphi_1(E_{ij}) \in RE_{ij} + RE_{in} + RE_{1j} + RE_{1n}$$

设

$$\varphi_1(E_{i,i+1}) \equiv a_{i,i+1}E_{i,i+1} + a_{1,i+1}E_{1,i+1} + a_{in}E_{in}(mod\ RE_{in})$$
$$i = 2, 3, \cdots, n-2$$

取

$$\nu = -\sum_{l=2}^{n-2} a_{l,n}E_{l+1,n} + \sum_{k=2}^{n-2} a_{1,k+1}E_{1,k}$$

则有

$$(\varphi_1 - ad\nu)(E_{i,i+1}) \equiv a_{i,i+1}E_{i,i+1}(\mathrm{mod}RE_{1n})$$
$$i = 2, 3, \cdots, n-2$$

$$(\varphi_1 - ad\nu)(E_{1j}) \in RE_{1j}(\mathrm{mod}RE_{1n})$$
$$j = 2, 3, \cdots, n$$

$$(\varphi_1 - ad\nu)(E_{in}) \in RE_{in}(\mathrm{mod}RE_{1n})$$
$$i = 2, 3, \cdots, n-1$$

再记 $\varphi_1 - ad\nu = \varphi_2$。考虑 $\varphi_2(E_{ij})$, 其中 $2 \leqslant i \leqslant n-3$, $i+2 \leqslant j \leqslant n-1$。因为 $(E_{i,i+1} - E_{ij})(E_{i+1,n} + E_{jn}) = 0$, 所以

$$\varphi_2(E_{i,i+1} - E_{ij})(E_{i+1,n} + E_{jn}) +$$
$$(E_{i,i+1} - E_{ij})\varphi_2(E_{i+1,n} + E_{jn}) = 0$$

由此得出 $\varphi_2(E_{ij})$ 的 $(1,j)$ 位置为 0。同理由

$$(E_{1i} + E_{1,j-1})(E_{ij} - E_{j-1,j}) = 0$$

得 $\varphi_2(E_{ij})$ 的 (i,n) 位置也为 0。故

$$\varphi_2(E_{ij}) \in RE_{ij} + R_{1n}, 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

定理 5　存在 $h \in D_n(R)$, $t \in R$ 以及 $y \in N_n(R)$ 使得 $\varphi_2 - D_h - \eta_y - \lambda_t = 0$。

证明　由以上证明设

$\varphi_2(E_{i,i+1}) \equiv a_{i,i+1}E_{i,i+1}(\mathrm{mod}RE_{1n})$ 其中 $i = 1, 2, \cdots, n-1$。令

$$h = diag\{0, -a_{12}, \cdots, -(\sum_{i=1}^{n-1} a_{i,i+1})\}$$

则 $(\varphi_2 - D_h)(E_{i,i+1}) \equiv 0(\mathrm{mod}RE_{1n})$, 记 $\varphi_2 - D_h = \varphi_3$。因此对任意的 $1 \leqslant i < j \leqslant n$, 假定

$$\varphi_3(E_{ij}) \equiv t_{ij}E_{ij}(\mathrm{mod}RE_{1n})$$

其中 $t_{i,i+1} = 0, i = 1, 2, \cdots, n-1$。由

$$(E_{i,i+2} + E_{i,i+1})(E_{i+2,i+3} - E_{i+1,i+3}) = 0$$

可知

$$\varphi_3(E_{i,i+2} + E_{i,i+1})(E_{i+2,i+3} - E_{i+1,i+3}) +$$
$$(E_{i,i+2} + E_{i,i+1})\varphi_3(E_{i+2,i+3} - E_{i+1,i+3}) = 0$$

故 $t_{i,i+2} = t_{i+2,i+3}$, 其中 $i = 1, 2, \cdots, n-3$, 设其为 $t, t \in R$。又

$$(E_{i,i+3} + E_{i,i+2})(E_{i+3,i+4} - E_{i+2,i+4}) = 0$$

据拟导子定义可得

$$t_{i,i+3} = 2t, i = 1, 2, \cdots, n-3$$

依次做下去可得出:

$$t_{i,i+4} = 3t, i = 1, 2, \cdots, n-4$$

$$t_{i,i+5} = 4t, i = 1, 2, \cdots, n-5$$

$$\vdots$$

$$t_{1,n-1} = t_{2n} = (n-3)t$$

构造一个可扩拟导子 λ_t 使得 $(\varphi_3 - \lambda_t)(E_{ij}) \in$

RE_{1n},$1 \leqslant i < j \leqslant n$。设

$$(\varphi_3 - \lambda_t)(E_{ij}) = y_{ij}E_{1n}, 1 \leqslant i < j \leqslant n$$

令

$$y = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} y_{ij}E_{1n}$$

则有

$$(\varphi_3 - \lambda_t - \eta_y)(E_{ij}) = 0$$

所以 $\varphi_3 - D_h - \eta_y - \lambda_t = 0$。

综上,当 $n \geqslant 4$ 时,$\varphi = adx + D_h + \lambda_f + \eta_y$,其中 $x = \mu + \nu$。

参 考 文 献:

[1] Leger G F,Luks E M.Generalized derivations of Lie algebras[J].J.Algebras.2000,228:165-203.

[2] 黄惠玲,谭宜家,张国勇.交换环上三角矩阵代数的自同构[J].数学研究,2007,40(2):201-206.

[3] 张丽红,王登银,张 波.可换环上一类矩阵李代数的导子和自同构[J].中国矿业大学学报,2006,35(5):699-702.

[4] Ou Shikun,Wang Dengyin,Yao Ruiping.Derivations of the Lie algebra of strictly upper triangular matrices over a commutative ring[J].Linear Algebra App.,2007,424:378-383.

[5] Wang Dengyin,Yu Qiu,Ou Shikun.Derivations of certain Lie algebras of upper triangular matrices over commutative rings[J].Journal of Mathematical Research and Exposition,2007,27(3):474-478.

[6] 赵延霞,姚瑞平,王登银.交换环上上三角矩阵代数的扩代数及其若当导子[J].系统科学与数学,2008,28(12):1502-1508.

[7] 李娜娜,张荣娟.交换环上一类矩阵代数的拟导子[J].四川理工学院学报:自然科学版,2011,24(1):29-31.

Quasi-Derivations of the Algebra of Strictly Upper Triangular Matrices over a Commutative Ring

GUAN Qi, *ZHENG Ting*

(College of Sciences, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221008, China)

Abstract: Let Rbe an arbitrary commutative ring with identity. Denoted by $N_n(R)$ the associative $R-$algebra over Rconsisting of all strictly upper triangular $n$by $n$matrices. A linear transformation φon $N_n(R)$ is called a qusi-derivation of it if there exist a liner transformation $\bar{\varphi}$ on $N_n(R)$ such that $\bar{\varphi}(xy) = \varphi(x)y + x\varphi(y)$ for $\forall x, y \in N_n(R)$. In this paper, an explicit description on the quasi-derivations of $N_n(R)$ has been given, which generalized the notion of derivations to a more general case.

Key words: strictly upper triangular matrices algebra; derivation; quasi-derivation; commutative ring