第 24 卷第 5 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 24 No. 5
2011 年 10 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Oct. 2011

文章编号:1673-1549(2011)05-0599-05

一类退化椭圆方程在高阶特征值处近共振的多重解

安育成[1,2], 索洪敏[1]

(1. 贵州民族学院理学院, 贵阳 550025;2. 毕节学院数学与计算机科学学院, 贵州 毕节 551700)

摘　要:通过对一类退化椭圆方程的研究,利用临界点理论中的极小极大原理和一个广义的 Landesman – Lazer 类型条件,获得了退化椭圆方程在高阶特征值处近共振的多重解。

关键词:退化椭圆方程;极小极大原理;Landesman – Lazer 类型条件;多重解

中图分类号:O177　　**文献标识码:**A

1　引言及主要结果

考虑如下一类退化椭圆方程的近共振问题

$$\begin{cases} -div(a(x)\nabla u) = \lambda u + g(x,u) & in\Omega \\ u = 0 & on\partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 Ω 为 $R^n(n \geqslant 2)$ 中的光滑有界区域, λ 是一个正参数, $g(x,u)$ 是一个 Caratheodory 函数, a 是一个非负可测的加权系数,并且 $a \in L^1_{loc}(\Omega)$。让 $\alpha \in [0, +\infty)$, 对 f 和 a 作如下假设:

(g1)对 $\forall \rho > 0$, $\exists L_\rho \in L^2(\Omega)$, 使得 a. e. $x \in \Omega$, 当 $|t| \leqslant \rho$ 时, $|g(x,t)| \leqslant L_\rho(x)$。

(g2) $\lim\limits_{|t|\to\infty} \dfrac{g(x,t)}{t} = 0$ 对 $x \in \Omega$ 一致成立。

(A) $\lim\limits_{x\to z} |x-z|^{-\alpha} a(x) > 0, \forall z \in \bar{\Omega}$

当加权系数 $a(x)$ 满足条件(A)时,椭圆算子 $Lu = -div(a(x)\nabla u)$ 是退化的。在文献[1]中,假设 $a \in L^1{}_{loc}(\Omega)$, 并且满足条件(A)时,证明了椭圆算子 L 满足标准的紧自伴算子的谱理论,以及具有无界的特征值序列: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k < \cdots \to +\infty$。记 N_k 表示特征值 λ_k 对应的特征函数空间,于是 Hilbert 空间 $H^1_0(\Omega,a) = \bigoplus\limits_{k=1}^{\infty} N_k$, 其中 $H^1_0(\Omega,a)$ 中的内积与范数同文献[1]中的定义。

1997 年,文献[2]首次引入一种广义的 Landesman – Lazer 类型条件用于研究两点边值共振问题,建立了两个解的存在性结果。随后这两个存在性结果,在文献[3]中被推广到了半线性椭圆方程,在文献[4]中被推广到 p – Laplace 方程,在文献[5]中被推广到合作椭圆系统,现将此结果推广到退化椭圆方程,类似于文献[5],定义函数:

$$F(x,t) = \begin{cases} \dfrac{2G(x,t) - g(x,t)t}{t} & t \neq 0 \\ g(x,0) & t = 0 \end{cases}$$

其中, $G(x,t) = \int_0^t g(x,s)ds$, 以及假设

(F1) $\liminf\limits_{t\to-\infty} F(x,t) = \underline{F}(x,-\infty)$ $\limsup\limits_{t\to+\infty} F(x,t) = \bar{F}(x,+\infty)$ 对 $x \in \Omega$ 一致。

(F2) $\liminf\limits_{t\to+\infty} F(x,t) = \underline{F}(x,+\infty)$ $\limsup\limits_{t\to-\infty} F(x,t) = \bar{F}(x,-\infty)$ 对 $x \in \Omega$ 一致。

定理 1　假设(g1),(g2),(A)以及(F1)成立,且设 $\underline{F}(x,-\infty), \bar{F}(x,+\infty) \in L^2(\Omega)$, $u \in N_k \backslash \{0\}$ 满足 $\int_\Omega \bar{F}(x,+\infty)u^- dx < \int_\Omega \underline{F}(x,-\infty)u^+ dx$ ($k \geqslant 2$),那么存在 $\delta_1 > 0$, 使得 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_k + \delta_1)$ 时,问题(1)至少存在两个解,这里 $u^\pm = \max\{0, \pm u\}$。

定理 2　假设(g1),(g2),(A)以及(F2)成立,且设 $\underline{F}(x,+\infty), \underline{F}(x,-\infty) \in L^2(\Omega)$, $u \in N_k \backslash \{0\}$ 满足 $\int_\Omega$

收稿日期:2011-09-17

基金项目:毕节地区科学技术基金资助项目([2011]02)

作者简介:安育成(1978-),男,贵州遵义人,讲师,硕士生,主要从事非线性分析方面的研究,(E-mail)anyucheng@126.com

$\overline{F}(x,-\infty)u^- dx < \int_\Omega \underline{F}(x,+\infty)u^+ dx$ ($k \geqslant 2$),那么存在 $\delta_2 > 0$, 使得 $\lambda \in (\lambda_k - \delta_2, \lambda_k)$ 时,问题(1)至少存在两个解。

2 定理证明

问题(1)的解是对应泛函

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega G(x,u)dx$$

的临界点,其中 $u \in H_0^1(\Omega,a)$。为了证明定理,需要介绍如下引理。

引理 1[6] 令 X 为 Hilbert 空间且存在直和分解 $X_1 \oplus X_2$, 令 $J \in C^1(X,R)$, 假设 $\exists r_1, r_2 > 0$, 使得

$$\sup_{u \in r_1 \partial B_{X_1}} J(u) < a = \inf_{u \in r_2 B_{X_2}} J(u) \leqslant b = \sup_{u \in r_1 B_{X_1}} J(u) < \inf_{u \in r_2 \partial B_{X_2}} J(u)$$

如果 J 满足 ($P.S.$) 条件,且子空间 X_1 和 X_2 至少有一个是有限维的,则泛函 J 有一个临界点 u_0 满足 $J(u_0) \in [a,b]$。

引理 2[7] 设 Hilbert 空间 X 具有直和分解 $X = X_1 \oplus X_0 \oplus X_2$, 且 $\dim(X_0 \oplus X_2) < +\infty$, 对 $R_2 > R_1 > 0$, 令

$$A = \{u \in X_1 : \|u\| \geqslant R_1\} \cup \{u \in X_1 \oplus X_0 : \|u\| = R_1\}$$

$$B = \{u \in X_0 \oplus X_2 : \|u\| = R_2\}$$

则 A 和 B 环绕。

引理 3 假设(g1)和(g2)成立,则对 $\forall k \in N^+$, 当 $\lambda \neq \lambda_k$ 时,泛函 J_λ 满足 ($P.S.$) 条件。

证 明 对任意序列 $\{u_n\} \subset H_0^1(\Omega,a)$ 满足 $|J_\lambda(u_n)| < +\infty$, 且 $J'_\lambda(u_n) \to 0, n \to \infty$。事实上,由标准的讨论,只需证明 $\{u_n\}$ 在 $H_0^1(\Omega,a)$ 中有界。假设 $n \to \infty$ 时, $\|u_n\| \to \infty$。令 $w_n = \dfrac{u_n}{\|u_n\|}$, 则 $\{w_n\}$ 有界,于是 $\exists w \in H_0^1(\Omega,a)$, 使得当 $n \to \infty$ 时, w_n 在 $H_0^1(\Omega,a)$ 中弱收敛到 w, w_n 在 $L^q(\Omega)$ 中强收敛到 w, 其中 $q \in [1, 2_\alpha^*)$。此外,由条件(g1)和(g2)知:对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在 $\widehat{\rho_\varepsilon} > 0$, 使得对任意 $t \in R$ 和 a.e. $x \in \Omega$ 都有 $|g(x,t)| \leqslant \varepsilon|t| + L_{\widehat{\rho_\varepsilon}}(x)$, 进而就有

$$|G(x,t)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}|t|^2 + L_{\widehat{\rho_\varepsilon}}(x)\,|t| \tag{2}$$

以及对 $\forall v \in H_0^1(\Omega,a)$, 有

$$\frac{1}{\|u_n\|}\left|\int_\Omega g(x,u_n)v\right| dx \leqslant \frac{1}{\|u_n\|}\int_\Omega (\varepsilon|u_n| + L_{\widehat{\rho_\varepsilon}}(x))\,|v|\,dx \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{\lambda_1}}\|v\|_{L^2} + \frac{\|L_{\widehat{\rho_\varepsilon}}\|_{L^2}\|v\|_{L^2}}{\|u_n\|}$$

从而由 ε 的任意性可得: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\|u_n\|}\int_\Omega g(x,u_n)v\,dx = 0$, 同理, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\|u_n\|}\int_\Omega G(x,u_n)dx = 0$, 又因为

$$\frac{< J'_\lambda(u_n), v >}{\|u_n\|} = \int_\Omega a(x)\nabla w_n \nabla v\,dx - \lambda\int_\Omega \nabla w_n \nabla v\,dx - \frac{1}{\|u_n\|}\int_\Omega g(x,u_n)v\,dx$$

于是当 $n \to \infty$ 时,有

$$\int_\Omega a(x)\nabla w \nabla v\,dx - \lambda\int_\Omega wv\,dx = 0$$

即: $w \in \ker(\nabla - \lambda)$。另一方面,因为

$$\frac{J_\lambda(u_n)}{\|u_n\|^2} = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,|\nabla w_n|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |w_n|^2 dx - \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega G(x,u_n)dx$$

那么两边取极限得: $1 - \dfrac{\lambda}{2}\int_\Omega |w|^2 dx = 0$, 即 $w \neq 0$。因此, w 是 $-\Delta$ 的一个特征值,这与 $\lambda \neq \lambda_k$ 矛盾。

定理 1 的证明 由引理 3 知泛函 J_λ 满足 ($P.S.$) 条件,令 $W_1 = \bigoplus_{i=k+1}^{\infty} N_i, W_0 = N_k, W_2 = \bigoplus_{i=1}^{k-1} N_i$, 当 $\lambda > \lambda_k$ 充分接近 λ_k 时,分两步证明泛函有两个不同的临界点。

第一步:对 $\lambda > \lambda_k$ 和 $u \in W_2$, 在(2)式中限制 $\varepsilon \in (0, \dfrac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{2})$, 则

$$J_\lambda(u) \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega u^2 dx + \int_\Omega L_{\widehat{\rho_\varepsilon}}(x)\,|u|\,dx \leqslant -\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{4\lambda_{k-1}}\|u\|^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|L_{\widehat{\rho_\varepsilon}}\|_{L^2}\|u\|$$

即当 $\|u\| \to \infty$ 时, $J_\lambda(u) \to -\infty$ 对 $\lambda > \lambda_k$ 一致成立。于是可令

$$M = \sup_{\lambda \in (\lambda_k, \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}), u \in W_2} J_\lambda(u)$$

现在断言:存在仅依赖于 M 的常数 $R_1 > 0$, 以及 $\delta_1 \in (0, \dfrac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2})$, 使得对任意的 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_k + \delta_1)$, 都有 $J_\lambda(u) > M + 1$。其中 $u \in W_1$ 满足 $\|u\| \geqslant R_1$, 或者 $u \in W_1 \oplus W_0$ 满足 $\|u\| = R_1$。

如果这个断言为真,那么对每一个 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_k + \delta_1)$, 存在常数 $R^* > 0$, 使得

$$\sup_{R^+\partial B_{W_1}} J_\lambda < a = \inf_{R_1 B_{W_1\oplus W_0}} J_\lambda$$

所以,对每一个 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_k + \delta_1)$, 都有

$$\sup_{R^+\partial B_{W_1}} J_\lambda < a = \inf_{R_1 B_{W_1\oplus W_0}} J_\lambda \leqslant b =$$

$$\sup_{R^+B_{W_1}} J_\lambda \leqslant \sup_{W_2} J_\lambda < M + 1 \leqslant \inf_{R_1\partial B_{W_1\oplus W_0}} J_\lambda$$

则由引理 1 可得泛函 J_λ 的第一个临界值 $c_1 \leqslant b \leqslant M$。

现在证明上面的断言为真:因为对每一个 $u \in H_0^1(\Omega,a)$, $J_\lambda(u)$ 关于 λ 是递减的,于是只需要证明存在仅依赖于 M 的常数 $R_1 > 0$, 以及 $\delta_1 \in (0, \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2})$, 使得对 $u \in W_1$ 满足 $\|u\| \geqslant R_1$, 或者 $u \in W_1 \oplus W_0$ 满足 $\|u\| = R_1$ 时,成立 $J_{\lambda_k+\delta_1}(u) > M + 1$。一方面,对 $\lambda \in (\lambda_k, \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2})$ 和 $u \in W_1$, 由(2)式,限制 $\varepsilon \in (0, \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{4})$ 可得

$$J_\lambda(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2 dx -$$

$$\frac{\lambda}{2}\int_\Omega u^2 dx - \int_\Omega G(x,u)\,dx \geqslant$$

$$\frac{1}{2}\int_\Omega a(x)\,|\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 dx -$$

$$\int_\Omega (\frac{\varepsilon}{2}u^2 + L_{\hat{\rho}_\varepsilon}(x)\,|u|)\,dx \geqslant$$

$$\frac{\lambda_{k+1} - \lambda - \varepsilon}{2\lambda_{k+1}}\|u\|^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|L_{\hat{\rho}_\varepsilon}\|_{L^2}\|u\| \geqslant$$

$$\frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{8\lambda_{k+1}}\|u\|^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|L_{\hat{\rho}_\varepsilon}\|_{L^2}\|u\|$$

因此,存在常数 $R_* > 0$, 使得 $J_\lambda(u) > M + 1$, $u \in W_1$ 满足 $\|u\| \geqslant R_*$, 对 $\lambda \in (\lambda_k, \frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2})$ 一致成立。另一方面,存在常数 $R_1 \geqslant R_*$ 和 $\delta_1 \in (0, \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2})$, 使得 $J_{\lambda_k+\delta_1}(u) > M + 1$, 对 $u \in W_1 \oplus W_0$ 满足 $\|u\| = R_1$ 成立。否则,对任意两个序列 $R_n \geqslant R_*$ 和 $\delta_n \in (0, \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2})$, 存在 $u_n \in W_1 \oplus W_0$ 满足 $\|u_n\| = R_n$, 使得 $M + 1 > J_{\lambda_k+\delta_n}(u_n)$, 现选取 $R_n = n$, $\delta_n = \frac{1}{n^2}$, 记 $u_n = u_{1n} + u_{0n}$, 其中 $u_{1n} \in W_1$, $u_{0n} \in W_0$。从而, $\lim_{n\to\infty}\delta_n \frac{\|u_{0n}\|}{\|u_n\|} = 0$。此外,由(2)式及 ε 的任意性不难证明: $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega G(x,u_n)\,dx = 0$。又因为

$$\frac{M+1}{\|u_n\|^2} \geqslant \frac{J_{\lambda_k+\delta_n}(u_n)}{\|u_n\|^2} \geqslant$$

$$\frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k - \delta_n}{2\lambda_{k+1}} \frac{\|u_{1n}\|^2}{\|u_n\|^2} -$$

$$\frac{\delta_n}{2\lambda_k} \frac{\|u_{0n}\|^2}{\|u_n\|^2} - \frac{1}{\|u_n\|^2}\int_\Omega G(x,u_n)\,dx$$

于是,当 $n \to \infty$ 时,有 $0 \geqslant \liminf_{n\to\infty} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2\lambda_{k+1}} \frac{\|u_{1n}\|^2}{\|u_n\|^2}$, 即有 $\frac{u_{1n}}{\|u_n\|} \to 0$ 在 $H_0^1(\Omega,a)$ 中强收敛。又因为 W_0 是有限维的,所以 $\frac{u_{0n}}{\|u_n\|} \to u_0$ 在 W_0 中强收敛。进而, $\frac{u_n}{\|u_n\|} \to u_0$ 在 $H_0^1(\Omega,a)$ 中强收敛,故可知 $\|u_0\| = 1$。此外,对任意 $\varepsilon > 0$, 令 $C^\varepsilon(x) = \underline{F}(x, -\infty) - \varepsilon$, $D^\varepsilon(x) = \overline{F}(x, +\infty) + \varepsilon$, 则存在 $\rho_\varepsilon > 0$, 使得

$$F(x,t)\begin{cases} \geqslant C^\varepsilon(x), t \leqslant -\rho_\varepsilon, a.e.\ x \in \Omega \\ \leqslant D^\varepsilon(x), t \geqslant \rho_\varepsilon, a.e.\ x \in \Omega \end{cases}$$

于是,对 $t \leqslant -\rho_\varepsilon$ 和 a. e. $x \in \Omega$, 都有

$$\frac{d}{dt}(-\frac{G(x,t)}{t^2}) = \frac{F(x,t)}{t^2} \geqslant \frac{C^\varepsilon(x)}{t^2} = \frac{d}{dt}(-\frac{C^\varepsilon(x)}{t})$$

将此式在 $[s,t] \subset (-\infty, -\rho_\varepsilon)$ 上积分并利用条件(g2)可得: $-\frac{G(x,t)}{t^2} \geqslant -\frac{C^\varepsilon(x)}{t}$, 则有 $G(x,t) \leqslant C^\varepsilon(x)t$, 同理:对 $t \geqslant \rho_\varepsilon$ 和 a. e. $x \in \Omega$, 成立 $G(x,t) \leqslant D^\varepsilon(x)t$。此外,利用 Holder 不等式可得

$$\left|\int_\Omega C^\varepsilon(x) \frac{u_n^-}{\|u_n\|}dx - \int_\Omega C^\varepsilon(x) u_0^- dx\right| \to 0$$

$$\left|\int_\Omega D^\varepsilon(x) \frac{u_n^+}{\|u_n\|}dx - \int_\Omega D^\varepsilon(x) u_0^+ dx\right| \to 0$$

进而

$$\frac{M+1}{\|u_n\|} \geqslant \frac{J_{\lambda_k+\delta_n}(u_n)}{\|u_n\|} \geqslant -\frac{\delta_n}{2\lambda_k}\frac{\|u_{0n}\|^2}{\|u_n\|} -$$

$$\int_{u_n \leqslant -\rho_\varepsilon} C^\varepsilon(x) \frac{u_n}{\|u_n\|}dx - \int_{u_n \geqslant \rho_\varepsilon} D^\varepsilon(x) \frac{u_n}{\|u_n\|}dx +$$

$$\int_{-\rho_\varepsilon \leqslant u_n \leqslant 0} L_{\rho_\varepsilon} \frac{u_n}{\|u_n\|}dx - \int_{0 \leqslant u_n \leqslant \rho_\varepsilon} L_{\rho_\varepsilon} \frac{u_n}{\|u_n\|}dx =$$

$$-\frac{\delta_n}{2\lambda_k}\frac{\|u_{0n}\|^2}{\|u_n\|} + \int_\Omega C^\varepsilon(x) \frac{u_n^-}{\|u_n\|}dx - \int_\Omega D^\varepsilon(x) \frac{u_n^+}{\|u_n\|}dx +$$

$$\frac{1}{\|u_n\|}\int_{-\rho_\varepsilon \leqslant u_n \leqslant 0} (C^\varepsilon(x) + L_{\rho_\varepsilon})\,u_n dx +$$

$$\frac{1}{\|u_n\|}\int_{0 \leqslant u_n \leqslant \rho_\varepsilon} (D^\varepsilon(x) - L_{\rho_\varepsilon})\,u_n dx$$

对上式取极限可得

$$\int_{\Omega} C^{\varepsilon}(x) u_0^- dx - \int_{\Omega} D^{\varepsilon}(x) u_0^+ dx \leqslant 0$$

再由 ε 的任意性知

$$\int_{\Omega} \underline{F}(x, -\infty) u_0^- dx - \int_{\Omega} \overline{F}(x, +\infty) u_0^+ dx \leqslant 0$$

即:

$$\int_{\Omega} \overline{F}(x, +\infty)(-u_0)^- dx \geqslant \int_{\Omega} \underline{F}(x, -\infty)(-u_0)^+ dx$$

因为 $u_0 \in N_k \backslash \{0\}$, 从而与已知条件矛盾,于是断言为真。

第二步,对 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_k + \delta_1)$ 和 $u \in W_2 \oplus W_0$, 由(2)式,限制 $\varepsilon \in (0, \frac{\lambda - \lambda_k}{2})$ 可得

$$J_{\lambda}(u) \leqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} L_{\widehat{\rho}_{\varepsilon}}(x) |u| dx \leqslant - \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{4\lambda_{k-1}}\|u\|^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|L_{\widehat{\rho}_{\varepsilon}}\|_{L^2}\|u\|$$

亦即在空间 $W_2 \oplus W_0$ 中,当 $\|u\| \to \infty$ 时, $J_{\lambda}(u) \to -\infty$, 于是存在一个正常数 $\widehat{R} > R_1$, 使得 $J_{\lambda}(u) < M$ 对所有 $u \in W_2 \oplus W_0$ 满足 $\|u\| = \widehat{R}$ 成立。令

$$A = \{u \in W_1 : \|u\| \geqslant R_1\} \cup \{u \in W_1 \oplus W_0 : \|u\| = R_1\}$$

$$B = \{u \in W_1 \oplus W_0 : \|u\| = \widehat{R}\}$$

则由引理 2 知: A 与 B 环绕,于是当 $\lambda \in (\lambda_k, \lambda_k + \delta_1)$, 由环绕定理可得第二个临界点 $c_2 > M + 1 > c_1$。

定理 2 的证明 由引理 3 知 J_{λ} 满足 $(P.S.)$ 条件,令 W_1, W_0, W_2 如定理 1 中定义,当 $\lambda < \lambda_k$ 充分接近 λ_k 时,分三步证明泛函 J_{λ} 有两个不同的临界点。

第一步,对 $\lambda < \lambda_k$ 和 $u \in W_1$, 由(2)限制 $\varepsilon \in (0, \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{2})$ 可得

$$J_{\lambda}(u) \geqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega} |u|^2 dx - \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega} |u|^2 dx - \int_{\Omega} L_{\widehat{\rho}_{\varepsilon}}(x) |u| dx \geqslant \frac{\lambda_{k+1} - \lambda - \varepsilon}{2\lambda_{k+1}}\|u\|^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|L_{\widehat{\rho}_{\varepsilon}}\|_{L^2}\|u\| \geqslant \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{4\lambda_{k+1}}\|u\|^2 - \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|L_{\widehat{\rho}_{\varepsilon}}\|_{L^2}\|u\|$$

亦即在空间 W_1 中,当 $\|u\| \to \infty$ 时, $J_{\lambda}(u) \to +\infty$ 对 $\lambda < \lambda_k$ 一致成立。从而可令

$$\beta' = \inf_{\lambda \in (\frac{\lambda_k + \lambda_{k+1}}{2}, \lambda_k), u \in W_1} J_{\lambda}(u)$$

类似于定理 1 中 $J_{\lambda}(u) > M + 1$ 的证明,对任意 $\alpha' < \beta'$, 存在仅依赖于 α' 的常数 $R_2 > 0$ 和 $\delta_2 \in (0, \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{2})$, 使得对每一个 $\lambda \in (\lambda_k - \delta_2, \lambda_k)$ 有 $J_{\lambda}(u) < \alpha'$, 其中 $u \in W_2$ 满足 $\|u\| \geqslant R_2$, 或 $u \in W_2 \oplus W_0$ 满足 $\|u\| = R_2$。于是由环绕定理可得泛函 $J_{\lambda}(u)$ 的第一个临界点,其对应的临界值为

$$c_1 = \inf_{\gamma \in \Gamma_1} \sup_{u \in R_2 B_{W_2 \oplus W_0}} J_{\lambda}(\gamma(u))$$

其中:

$$\Gamma_1 = \{\gamma \in C^0(R_2 B_{W_2 \oplus W_0}, H_0^1(\Omega, a)) : \gamma|_{R_2 \partial B_{W_2 \oplus W_0}} = id\}$$

第二步,对 $\lambda \in (\lambda_k - \delta_2, \lambda_k)$ 和 $u \in W_2$, 由(2)式,限制 $\varepsilon \in (0, \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{4})$ 可得

$$J_{\lambda}(u) \leqslant \frac{1}{2}\int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega} |u|^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} L_{\widehat{\rho}_{\varepsilon}}(x) |u| dx \leqslant \frac{\lambda_{k-1} - \lambda + \varepsilon}{2\lambda_{k-1}}\|u\|^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|L_{\widehat{\rho}_{\varepsilon}}\|_{L^2}\|u\| \leqslant - \frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{8\lambda_{k-1}}\|u\|^2 + \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}}\|L_{\widehat{\rho}_{\varepsilon}}\|_{L^2}\|u\|$$

亦即在空间 W_2 中,当 $\|u\| \to \infty$ 时, $J_{\lambda}(u) \to -\infty$, 类似可证在空间 $W_1 \oplus W_0$ 中,当 $\|u\| \to \infty$ 时, $J_{\lambda}(u) \to +\infty$, 于是存在常数 $\alpha'' < \beta''$ 和 $\overline{R} > R_2$, 使得 $J_{\lambda}(u) \geqslant \beta''$ 对 $u \in W_1 \oplus W_0$ 成立,以及 $J_{\lambda}(u) \leqslant \alpha''$ 对 $u \in \overline{R}\partial B_{W_2}$ 成立。因此,当 $\lambda \in (\lambda_k - \delta_2, \lambda_k)$ 时,由环绕定理可得泛函 J_{λ} 的第二个临界点,其对应的临界值为

$$c_2 = \inf_{\gamma \in \Gamma_2} \sup_{u \in \overline{R}B_{W_2}} J_{\lambda}(\gamma(u))$$

其中: $\Gamma_2 = \{\gamma \in C^0(\overline{R}B_{W_2}, H_0^1(\Omega, a)) : \gamma|_{\overline{R}\partial B_{W_2}} = id\}$。

第三步,根据文献[7]的思想,任取 $e_0 \in W_0$, 且 $\|e_0\| = 1$, 定义映射: $\widehat{\gamma} : \overline{R}B_{W_2} \to H_0^1(a, \Omega)$ 如下

$$\widehat{\gamma}(u) = \begin{cases} u + \sqrt{R_2^2 - \|u\|^2} e_0, & \|u\| \leqslant R_2 \\ u, & R_2 \leqslant \|u\| \leqslant \overline{R} \end{cases}$$

容易验证: $\widehat{\gamma} \in \Gamma_2$, 且当 $\lambda \in (\lambda_k - \delta_2, \lambda_k)$ 时,由 $J_{\lambda}(u) < \alpha'$ 可知, $\sup_{u \in \overline{R}B_{W_2}} J_{\lambda}(\widehat{\gamma}(u)) \leqslant \alpha'$, 亦即有 $c_2 \leqslant \alpha'$, 结合 $c_1 \geqslant \beta' > \alpha'$, 可知 $c_2 < c_1$。

参 考 文 献:

[1] Caldiroli P,Musina R.On a variational degenerate elliptic problem[J]. NoDEA, Nonlinear differ. equ. appl., 2008,(7):187-199.

[2] Tang C L Solvability for two-point boundary value problems[J].J.Math.Anal.Appl.,1997,216(1):368-374.

[3] Wu X P,Tang C L.Some existence theorems for elliptic resonant problems[J]. J. Math, Anal. Appl., 2001, 264 (1): 133-146.

[4] Birkho G D. Dynamical systems with two degrees of freedom[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1917, 18 (2): 199-300.

[5] Ou Z Q,Tang C L.Resonance problems for the p-Laplacian systems,J.Math.Anal.Appl.,2008,345(1):511-521.

[6] Marino A,Micheletti A,Pistoia M.A nonsymmetric asymptoticallylinear elliptic problem [J]. Topol. Methods Nonlinear Anal.,1994,4(2):289-339.

[7] De Paiva,Massa F O,E Semilinear elliptic problems near resonance with a nonprincipal eigenvalue[J]. J. Math. Anal. Appl.,2008,342(1):638-650.

Multiple Solutions for Degenerate Elliptic Equations Near Resonance at Higher Eigenvalues

An Yu-cheng[1,2], *Suo Hong-min*[1]

(1. School of Science, Guizhou University for Nationalities, Guiyang 550025, China;

2. School of Mathematics and Computer Science of Bijie University, Bijie 551700, China)

Abstract: A class of degenerate elliptic equations is studied. By using the minimax methods in critical point theory and a generalized Landesman-Lazer type condition, multiple solutions are obtained for a class of degenerate elliptic equations near resonance at higher eigenvalues.

Key words: degenerate elliptic equations; minimax methods; Landesman-Lazer type condition; multiple solutions