第 24 卷第 5 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 24　No. 5
2011 年 10 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Oct. 2011
文章编号:1673-1549(2011)05-0593-03

关于 Diophantine 方程 $x^3 \pm 8 = Dy^2$

李　娜

(西北大学数学系,西安　710127)

摘　要: 利用数论中同余的性质研究丢番图方程 $x^3 \pm 8 = Dy^2$ ($D = D_1p$, D 是无平方因子的正整数,其中 D_1 是不能被 3 或 $6k+1$ 之形的素数整除的正整数, p 是正奇素数)的解的情况,证明了当 $D_1 = 3, 7(\mathrm{mod}8)$, $p = 3(8k+7)(8k+8)+1$ 时,方程 $x^3+8 = Dy^2$ 无正整数解;当 $D_1 = 7(\mathrm{mod}8)$, $p = 3(8k+5)(8k+6)+1$ 时, $x^3-8 = Dy^2$ 无正整数解。

关键词: 丢番图方程;正整数解;奇素数

中图分类号: O156.1　　　　**文献标识码:** A

引　言

设 N 是全体正整数的集合, D 是无平方因子的正奇数,方程

$$x^3 \pm 8 = Dy^2\ x,y \in N,\ \gcd(x,y) = 1 \tag{1}$$

是一类基本而又重要的 Diophantine 方程,有关它的研究可以追溯到 Euler 时代,关于方程(1)国内外一直有人在研究。1942 年 Ljunggren[1] 证明了当 D 不能被 3 或 $6k+1$ 之形素数整除时,这两个方程至多有一组整数解。1981 年柯召和孙琦[2] 证明了当 D 满足上述条件,并且 $D \equiv 0,2,3(\mathrm{mod}4)$,则方程 $x^3+8 = Dy^2$ 无整数解, $D \equiv 0,1,2,(\mathrm{mod}4)$ 则方程 $x^3-8 = Dy^2$ 无整数解。1992 年曹玉书[3] 证明了当 $D = 3$ 时,方程(1)有解 $(x,y) = (11,21)$, $D \equiv 5(\mathrm{mod}6)$ 时,方程 $x^3-8 = Dy^2$ 无正整数解。乐茂华[4] 证明了当 D 是奇素数且 $D = 12s^2+1$,其中 s 是偶数,方程 $x^3-8 = Dy^2$ 无正整数解。文献[5]证明了,当 D 为适合 $D \equiv 5(\mathrm{mod}8)$ 的奇素数时,方程 $x^3+8 = 3Dy^2$ 无正整数解,当 D 为适合 $D \equiv 7(\mathrm{mod}8)$ 的奇素数,方程 $x^3-8 = 3Dy^2$ 无正整数解。本文证明了以下一般性的结论。

1　主要定理

定理 1　设 $D = D_1p$,这里 D 是无平方因子的正整数, D_1 是不能被 3 或 $6k+1$ 之形的素数整,除的正整数, $D_1 = 3,7(\mathrm{mod}8)$, p 是奇素数 $p = 3(8k+7)(8k+8)+1$,其中 k 是正整数,则

$$x^3+8 = Dy^2 x,y \in N\gcd(x,y) = 1 \tag{2}$$

无正整数解。

定理 2　设 $D = D_1p$,这里 D 是无平方因子的正整数, D_1 是不能被 3 或 $6k+1$ 之形的素数整除的正整数, $D_1 = 7(\mathrm{mod}8)$, p 是奇素数, $p = 3(8k+5)(8k+6)+1$,其中 k 是正整数,则

$$x^3-8 = Dy^2 x,y \in N\gcd(x,y) = 1 \tag{3}$$

无正整数解。

2　定理的证明

定理 1 的证明:设 (x,y) 是方程(2)的解,由方程(2)知, x 与 y 均为奇数,因为 $\gcd(x+2,x^2-2x+4) = 1$ 或 3,故方程(2)有下列四种可能的分解:

(Ⅰ) $x+2 = D_1pa^2$, $x^2-2x+4 = b^2$ 其中, $y = ab$, $\gcd(a,b) = 1$。

(Ⅱ) $x+2 = D_1a^2$, $x^2-2x+4 = pb^2$,其中, $y = ab$, $\gcd(a,b) = 1$。

(Ⅲ) $x+2 = 3D_1pa^2$, $x^2-2x+4 = 3b^2$,其中, $y = 3ab$, $\gcd(a,b) = 1$。

收稿日期:2011-04-06
作者简介:李　娜(1985-),女,陕西咸阳人,硕士生,主要从事数论方面的研究,(E-mail)linaxiaoxixi@163.com

(Ⅳ) $x+2=3D_1a^2$, $x^2-2x+4=3pb^2$, 其中, $y=3ab$, $\gcd(a,b)=1$。

情形(Ⅰ) 由于 x 为奇数,则 $x^2-2x+4=(x-1)^2+3\equiv 3(\mathrm{mod}4)$, 而 $b^2\equiv 1(\mathrm{mod}4)$, 从而情形(Ⅰ)无正整数解。

情形(Ⅱ) 由 $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, $D_1\equiv 3,7(\mathrm{mod}8)$ 知 $x+2=D_1a^2\equiv 3,7(\mathrm{mod}8)$, 从而

$x\equiv 1,5(\mathrm{mod}8)$

$$x^2-2x+4\equiv 3(\mathrm{mod}8) \tag{4}$$

但是 $p\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, $b^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, 因此 $pb^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, 而 $x^2-2x+4=pb^2$, 这与方程(4)矛盾,故情形(Ⅱ)无正整数解。

情形(Ⅲ) 因为 $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, $D_1\equiv 3,7(\mathrm{mod}8)$, $p\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, 所以 $x+2=3D_1pa^2\equiv 1,5(\mathrm{mod}8)$, 从而

$x\equiv 3,7(\mathrm{mod}8)$

$$x^2-2x+4\equiv 7(\mathrm{mod}8) \tag{5}$$

但是 $b^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, 而 $x^2-2x+4=3b^2$, 这与(5)矛盾,故情形(Ⅲ)无正整数解。

情形(Ⅳ) 由 $x^2-2x+4=3pb^2$ 知 $(x-1)^2+3=3pb^2$, 因为 $x+2=3D_1a^2$, 所以

$$3(D_1a^2-1)^2+1=pb^2 \tag{6}$$

从(6)式可知,方程

$$pX^2-3Y^2=1\ X,Y\in N \tag{7}$$

有解 $(X,Y)=(b,D_1a^2-1)$, 因 $p=3(8k+7)(8k+8)+1$, 那么 $(2,16k+15)$ 是方程(7)的最小正整数解,否则,若 $(1,y)$ 是方程(7)的最小正整数,则 $y^2=\frac{D-1}{3}=(8k+7)(8k+8)$, 令 $\begin{cases}8k+7=y_1\\8k+8=y_2\end{cases}$ 其中 $y=y_1y_2$, $y_1,y_2\in N$, 则 $y_2-y_1=1$, 而这是不可能的,因此 $(2,16k+15)$ 是方程(7)的最小正整数解,于是根据文献[6]中的结果,从(6)式可得

$$b\sqrt{p}+(D_1a^2-1)=[2\sqrt{p}+(16k+15)\sqrt{3}]^t \tag{8}$$

其中 t 是正奇数,由(8)式可得 $b\equiv 0(\mathrm{mod}2)$, 再由(6)式有 $a\equiv 0(\mathrm{mod}2)$, 与 $\gcd(a,b)=1$ 矛盾,因此可知情形(Ⅳ)无正整数解。

综合四种情形的结果,定理 1 得证。

定理 2 的证明:设 (x,y) 是方程(3)的解,由方程(3)知, x 与 y 均为奇数,因为 $\gcd(x-2,x^2+2x+4)=1$ 或 3, 故方程(3)有下列四种可能的分解:

(Ⅰ) $x-2=D_1pa^2$, $x^2+2x+4=b^2$, 其中, $y=ab$, $\gcd(a,b)=1$。

(Ⅱ) $x-2=D_1a^2$, $x^2+2x+4=pb^2$, 其中, $y=ab$, $\gcd(a,b)=1$。

(Ⅲ) $x-2=3D_1pa^2$, $x^2+2x+4=3b^2$, 其中, $y=3ab$, $\gcd(a,b)=1$。

(Ⅳ) $x-2=3D_1a^2$, $x^2+2x+4=3pb^2$, 其中, $y=3ab$, $\gcd(a,b)=1$。

情形(Ⅰ) 由于 x 为奇数,则 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3\equiv 3(\mathrm{mod}4)$, 而 $b^2\equiv 1(\mathrm{mod}4)$, 从而情形Ⅰ无正整解。

情形(Ⅱ) $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, $D_1\equiv 3,7(\mathrm{mod}8)$ 知 $x-2=D_1a^2\equiv 3(\mathrm{mod}8)$, 从而

$x\equiv 5(\mathrm{mod}8)$

$$x^2-2x+4\equiv 3(\mathrm{mod}8) \tag{9}$$

但是 $p\equiv 3(\mathrm{mod}8)$, $b^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, 因此 $pb^2\equiv 3(\mathrm{mod}8)$, 而 $x^2-2x+4=pb^2$, 这与方程(9)矛盾,故情形(Ⅱ)无正整数解。

情形(Ⅲ) 因为 $a^2\equiv 1(\mathrm{mod}8)$, $D_1\equiv 3(\mathrm{mod}8)$, $p\equiv 7(\mathrm{mod}8)$, 所以 $x-2=3D_1pa^2\equiv 7(\mathrm{mod}8)$, 从而

$x\equiv 1(\mathrm{mod}8)$

$$x^2+2x+4\equiv 7(\mathrm{mod}8) \tag{10}$$

但是 $3b^2\equiv 3(\mathrm{mod}8)$, 而 $x^2-2x+4=3b^2$, 这与方程(10)矛盾,故情形(Ⅲ)无正整数解。

情形(Ⅳ) 由情形(Ⅳ)成立有

$$3(D_1a^2+1)^2+1=pb^2 \tag{11}$$

从(11)式可知,方程

$$pX^2-3Y^2=1\ X,Y\in N \tag{12}$$

有解 $(X,Y)=(b,D_1a^2+1)$, 因为 $p=3(8k+5)(8k+6)+1$, 那么 $(2,16k+11)$ 是方程(12)的最小正整数解,否则,若 $(1,y)$ 是方程(12)的最小正整数,则 $y^2=\frac{D-1}{3}=(8k+5)(8k+6)$, 令 $\begin{cases}8k+5=y_1\\8k+6=y_2\end{cases}$, 其中 $y=y_1y_2$, $y_1,y_2\in N$, 则 $y_2-y_1=1$, 而这是不可能的,因此 $(2,16k+11)$ 是方程(12)的最小正整数解,于是根据文献[6]中的结果,从(11)式可得

$$b\sqrt{p}+(D_1a^2-1)\sqrt{3}=[2\sqrt{p}+(16k+15)\sqrt{3}]^t \tag{13}$$

其中 t 是正奇数,由(13)式可得 $b\equiv 0(\mathrm{mod}2)$, 再由(11)式有 $a\equiv 0(\mathrm{mod}2)$, 与 $\gcd(a,b)=1$ 矛盾,因此可知情形(Ⅳ)无正整数解。

综合四种情形的结果,定理 2 得证。

参 考 文 献:

[1] Ljunggren w. Satzeber unbestimmte Gle-ichungen[J]. Skr Norske Vid Akad Oslo I,1942,9:53.

[2] 柯 召,孙 琦.关于丢番图方程 $x^3 \pm 8 = Dy^2$ 和 $x^3 \pm 8 = 3Dy^2$ [J].四川大学学报:自然科学版,1981,18(4):1-5.

[3] 曹玉书,黄龙铉.关于 Diophantine 方程 $x^3 \pm 8 = Dy^2$ [J].黑龙江大学学报:自然科学版,1992,19(2):1-5.

[4] 乐茂华.关于 Diophantine 方程 $x^3 - 8 = Dy^2$ [J].烟台师范大学学报:自然科学版,2004,20(3):171-172.

[5] Walker D T. On the Diophantine equation $mx^2 - ny^2 = \pm 1$ [J]. Amer Math monthly,1967,74:504-513.

[6] 韩云娜,赵春花.关于 Diophantine 方程 $x^3 \pm 8 = 3Dy^2$ [J].四川理工学院学报:自然科学版,2010,23(2):156-157.

On the Diophantine Equation $x^3 \pm 8 = Dy^2$

LI Na

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract: Using the property of congruence in Number theory, the solutions of Diophantine equation $x^3 \pm 8 = Dy^2$ are investigated, where D is square-free positive integer, $D = D_1 p$, D_1 cannot exact divided by the prime number 3 or $6k+1$, and p is an positive odd prime. It is proved that if $D_1 = 3, 7 \pmod 8$, $p = 3(8k+7)(8k+8)+1$, the equation $x^3 + 8 = Dy^2$ has no positive integer solution, if $D_1 = 7 \pmod 8$, $p = 3(8k+5)(8k+6)+1$, the equation $x^3 - 8 = Dy^2$ has no positive integer solution.

Key words: Diophantine equation; positive integer solution; odd prime