第 24 卷第 5 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 24 No. 5
2011 年 10 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Oct. 2011
文章编号:1673-1549(2011)05-0596-03

随机环境中马氏链的状态研究

崔 静

(安徽师范大学数学与计算机科学学院,安徽 芜湖 241000)

摘 要: 利用马氏链的一般理论讨论了随机环境中马氏链的性质和状态分类。借助于随机环境中马氏链的特征数,首先讨论了状态本质与正则本质的关系,给出了正则本质态的一个充分条件,在此基础上研究了弱常返态与正则本质态的关系及本质态与非正则本质态的关系,而后在状态空间有限及联合空间不可分解的条件下对状态空间进行了分解。最后举出一个实例说明了文章结论的正确性。

关键词: 随机环境中马氏链;正则本质;弱常返;不可分解

中图分类号: O211.62 **文献标识码:** A

随机环境中的马氏过程是由美国数学家 W. Smith 在研究分支过程时提出的,其物理背景来自于物理学中不均匀介质中传输问题。随机环境模型在物理学、生物学等领域有着广泛的应用。随机环境中马氏链的一般框架是在上世纪七八十年代 Cogburn 等人建立的[1-4],随后国内外许多学者展开了一系列的研究并取得了丰硕的成果,Orey[5] 在其特邀论文中评价了 Cogburn 等人的工作并提出了一系列开问题,肖争艳[6] 介绍了绕积马氏链的特征数和状态的定义以及在一定条件下状态正则本质的充要条件。本文讨论了随机环境中马氏链的各种状态之间的关系,给出了状态正则本质与弱常返的关系并在联合空间不可分解的条件下对状态空间进行了分解。

1 预备知识

设 (Ω,F,P) 为一概率空间,(Θ,B) 是任一可测空间,X 是至多可数集,A 是其上的离散 σ -代数,$\overrightarrow{X_0^\infty} = (X_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $\overrightarrow{\xi} = (\xi_n)_{n\in Z}$ 分别是 (Ω,F,P) 上取值于 X 和 Θ 的随机序列。对 (X, A) 上的一族转移函数族 $\{P(\theta), \theta\in\Theta\}$,$P(\theta)(x,y)$,$x,y\in X$ 是 θ 的关于 B 实值可测的函数。若 $\overrightarrow{\xi} = (\xi_n)_{n\in Z}$ 和 $\overrightarrow{X_0^\infty} = (X_n)_{n\geqslant 0}$ 满足:

$$P(X_0 \in A \mid \overrightarrow{\xi}) = P(X_0 \in A \mid \overrightarrow{\xi_{-\infty}^0}) \text{ ,a. s.}$$

$$P(X_{n+1} \in A \mid \overrightarrow{X_0^n},\overrightarrow{\xi}) = P(\xi_n;X_n,A) \text{ ,a. s.}$$

其中 $A\in A$,则称 $\overrightarrow{X}$ 为随机环境 $\overrightarrow{\xi}$ 中的马氏链(记为 MCRE),称 $\overrightarrow{\xi}$ 为环境序列,X 是状态空间,Θ 为环境空间。

设 Z 为整数集,令 $B_k^l = \sigma(\Theta_n, k-1<n<l+1)$,其中 $-\infty\leqslant k\leqslant l\leqslant+\infty$,$\Theta_n:\Theta^z\to\Theta$,$n\in Z$,为坐标函数。假定 π 是可测空间 (Θ^z,B^z) 上的任意概率测度且满足 $\pi T^{-1}=\pi$,其中 T 为推移算子,即 $(\overrightarrow{T\theta})_n=\theta_{n+1}$,$\vec{\theta}\in\vec{\Theta}$,于是 θ_n 是取值于 Θ 的严平稳序列。记 $P(\theta_m,\cdots,\theta_n) = P(\theta_m)\cdots P(\theta_n)$,这里

$$\vec{\theta} = (\theta_n, n\in Z)\in\Theta^z, m\leqslant n\in(-\infty,+\infty)$$

设 k 为 X 上的计数测度,若记 $E = X\times\Theta^z$,$\Xi = A\times B^z$,$\mu = k\times\pi$,易知 (E,Ξ,μ) 为 σ -有限的测度空间,对 $\forall\,(\overrightarrow{x,\theta})\in E$,$F\in\Xi$,定义

$$P^n(\overrightarrow{x,\theta};F) = \sum_{y\in X} P(\theta_0,\cdots,\theta_{n-1};x,y)\,I_{(F)_y}(\overrightarrow{T^n\theta})$$

这里 $(F)_y = \{\overrightarrow{\theta}:(\overrightarrow{y,\theta})\in F\}$。显然若 $\vec{X}$ 是随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链,则 $\{(X_n, T^n\vec{\xi})\}$ 是经典的时齐的马氏链。对任意的 $F\in\Xi$,令 τ_F 表示首次到达集合 F 的时间,令

$$[F]_x = \{(\overrightarrow{x,\theta}):\overrightarrow{\theta}\in(F)\}$$

$$F^n(\vec{\theta};x,F) = P_{\overrightarrow{(x,\theta)}}(\tau_F = n)$$

$$L(\overrightarrow{x,\theta};F) = P_{\overrightarrow{(x,\theta)}}\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(X_n,\overrightarrow{T^n\theta})\in F\}\Big)$$

收稿日期: 2011-08-30

基金项目: 安徽省教育厅自然科学基金(KJ2011z147)

作者简介: 崔 静(1982-),女,安徽灵璧人,讲师,博士生,主要从事随机环境中的马氏链方面的研究,(E-mail)jcui123@126.com

$$F(Q;\alpha) = \{(x,\overrightarrow{\theta}) \in E: Q(x,\overrightarrow{\theta};F) = \alpha\}$$

$$Q(x,\overrightarrow{\theta};F) = P_{(x,\overrightarrow{\theta})}(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}\{(X_m,T^m\overrightarrow{\theta}) \in F\})$$

$$F(L;\alpha) = \{(x,\overrightarrow{\theta}) \in E: L(x,\overrightarrow{\theta};F) = \alpha\}$$

$$G(x,\overrightarrow{\theta};A) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y \in X} p(\theta_0,\cdots,\theta_{n-1};x,y)1_{(A)_y}(T^n\vec{\theta})$$

直观上,对 $F \in \Xi$, $Q(x,\overrightarrow{\theta};F)$ 和 $L(x,\overrightarrow{\theta};F)$ 分别表示双链 $(X_n,T^n\vec{\xi})$ 从点 $(x,\overrightarrow{\theta})$ 出发无穷次到达 F 和最终到达集合 F 的概率。

定义 1　若 $\pi(\overrightarrow{\theta}: Q(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) = 1) = 1$ 则称状态 x 是强常返的;若 $\pi(\overrightarrow{\theta}: G(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) = \infty) = 1$, 则称状态 x 是弱常返的。

定义 2　称 $F \in \Xi$ 是非本质的,如果 $Q(x,\overrightarrow{\theta};F) = 0\ \mu - a.e.(x,\overrightarrow{\theta}) \in E$, 否则称 F 为非本质的;如果一个本质集 F 可以表示为可数个非本质集的并,则称 F 为非正则本质的,否则称为正则本质的;称状态 x 是本质的(非本质的,正则本质的,非正则本质的),如果 $[E]_x$ 为本质的(非本质的,正则本质的,非正则本质的)。

定义 3　称集合 $F \in \Xi$ 是闭集,如果 F 非空且 $P1_F(x,\overrightarrow{\theta}) \geqslant 1_F(x,\overrightarrow{\theta})$; 一个闭集 F 是不可分解的,如果 F 不包含两个不相交的闭集。

定义 4　称状态 x 可达 y, 如果 $\pi(\overrightarrow{\theta}: L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_y) > 0) = 1$。

记马氏双链的保守集

$$C = \{(x,\overrightarrow{\theta}): \sum_{K=1}^{\infty} P(\theta_{-k},\cdots,\theta_{-1};x,x) = \infty\}$$

且记 $D = E - C$。

无特别说明外,本文沿用参考文献[1-5]中记号及定义。

2　主要结果及证明

引理 1[4]　(1) $F \in E$ 是正则本质集当且仅当 $\mu(F \cap C) > 0$。

(2) $\mu(F \cap C) > 0$, 则 $Q(x,\overrightarrow{\theta};F) = 1\ \mu \cdot a \cdot e(x,\overrightarrow{\theta}) \in \bar{F}$,其中 $\bar{F}$ 是包含 $F \cap C$ 的最小闭集。

引理 2[6]　限制在 C 上的闭集都是不变集,若 $F \subseteq C$, F 为闭集,则 $C - F$ 是空集或闭集。

引理 3[7]　下列叙述等价:

(1) x 为非本质的或非正则本质的。

(2) $[E]_x \subset D$。

(3) 存在 $\{B_i\}_{i \geqslant 1}, B_i \uparrow \overrightarrow{\Theta}$, 使得对任意 $i \geqslant 1$, 都有 $\sum_{i=1}^{\infty} P^n(x,\overrightarrow{\theta};\{x\} \times B_n) < \infty\ \pi - a \cdot e \cdot$。

引理 4[8]　对任意的 $(x,\overrightarrow{\theta}) \in E$, $F \in \Xi$ 有

$$Q(x,\overrightarrow{\theta};F) = L(x,\overrightarrow{\theta};F) - \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{y \in X} p(\theta_0,\cdots,\theta_{n-1};x,y) \cdot 1_{(F)_y}(T^n\vec{\theta})(1 - L(y,T^n\vec{\theta};F))$$

引理 5[8]　对任意集合 $F \in \Xi$, $F(L;0)$, $F(Q;0)$, $F(Q;1)$, 或为空集或为闭集。

引理 6　若 x 是本质的, $B \in \overrightarrow{B}$, 使得 $\pi(\overrightarrow{\theta}: \sum_{i=1}^{\infty} P^n(x,\overrightarrow{\theta};\{x\} \times B) = \infty) = 1$, 则 x 是正则本质的。

证明　(反证)若 x 是非正则本质的,则由引理 1 知 $\mu([E]_x \cap x) = \phi$, 从而 $[E]_x \subseteq D$, 由引理 3 知存在 $B_n \uparrow \overrightarrow{\Theta}$, $n \geqslant 1$, 使得 $\sum_{i=1}^{\infty} P^n(x,\overrightarrow{\theta};\{x\} \times B_k) < \infty\ \pi - a \cdot e \cdot$, $\forall k \geqslant 1$, 又 $\pi B > 0$, 故必存在 $m \geqslant 1$ 使得 $B \subseteq B_m$, 从而

$$\sum_{i=1}^{\infty} P^n(x,\overrightarrow{\theta};\{x\} \times B) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} P^n(x,\overrightarrow{\theta};\{x\} \times B_m) < \infty$$

矛盾,故 x 为正则本质的。

定理 1　若 x 是弱常返的且对任意的 $k \geqslant 1$, 都有 $\pi(\overrightarrow{\theta}: L(x,T^k\overrightarrow{\theta};[E]_x) = 1) > 0$, 则 x 是正则本质的。

证明　由 x 是弱常返的知

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^n(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) = \infty, \pi - a \cdot e \cdot \overrightarrow{\theta}$$

从而

$$L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) > 0\ \pi - a \cdot e \cdot \overrightarrow{\theta}$$

令

$$B = \{\overrightarrow{\theta}: L(x,T^k\overrightarrow{\theta};[E]_x) = 1, k \geqslant 1\}$$

则 $\pi B > 0$, 由引理 4 知

$$Q(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) = L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) - \sum_{n=1}^{\infty} p(\theta_0,\cdots,\theta_{n-1};x,x) \cdot (1 - L(x,T^n\vec{\theta};[E]_x))$$

故对有 $Q(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) = L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) > 0$, 从而 x 为本质的,由引理 6 知定理 1 得证。

定理 2　若 x 是本质的且 $\pi(\overrightarrow{\theta}: L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) < 1) = 1$, 则 x 是非正则本质的。

证明　令 $A_n = \{\overrightarrow{\theta}: L(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) < 1 - \frac{1}{n}\}$, 则 $A_n \uparrow \overrightarrow{\Theta}$, 由引理 4 知

$$L(x,\overrightarrow{\theta};\{x\} \times A_n) - Q(x,\overrightarrow{\theta};\{x\} \times A_n) = \sum_{k=1}^{\infty} p(\theta_0,\cdots,\theta_{k-1};x,x)1_{A_n}(T^k\overrightarrow{\theta}) \cdot (1 - L(x,T^k\overrightarrow{\theta};\{x\} \times A_n)) \geqslant$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(\theta_0,\cdots,\theta_{k-1};x,x)1_{A_n}(T^k\overrightarrow{\theta}) \cdot (1 - L(x,T^k\overrightarrow{\theta};[E]_x)) >$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} p(\theta_0,\cdots,\theta_{k-1};x,x)1_{A_n}(T^k\overrightarrow{\theta})$$

而 $L(x,\overrightarrow{\theta};\{x\}\times A_n)-Q(x,\overrightarrow{\theta};\{x\}\times A_n)\leqslant 1$，故

$$\sum_{k=1}^{\infty}p(\theta_0,\cdots,\theta_{k-1};x,x)1_{A_n}(T^k\overrightarrow{\theta})<n<\infty$$

由引理 3 及 x 是本质的知 x 为非正则本质的。

引理 7[9] 若 X 有限，则至少存在一正则本质的状态且非正则本质状态不存在。

引理 8[8] 若 x 是正则本质的，E 不可分解，则每个状态可达 x。

定理 3 若 E 不可分解且 X 有限，则 X 中的状态不是非本质的就是强常返的。

证明 因为 X 有限，由引理 7 知若 x 不是非本质的，则 x 是正则本质的，又 E 不可分解，由引理 8 知每个状态可达 x，即对任意的 $y\in X$，有 $L(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)>0\ \pi-a\cdot e\cdot\overrightarrow{\theta}$，令 $m(\overrightarrow{\theta})=\min_{y\in X}L(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)$，由 X 有限知 $m>0\ \pi-a\cdot e\cdot$。令 $B_n=\{\overrightarrow{\theta}:m(\overrightarrow{\theta})\geqslant\frac{1}{n}\}$，则 $\pi B_n\rightarrow 1\ (n\rightarrow\infty)$ 且对任意的 n，都有 $\inf_{\overrightarrow{\theta}\in B_n}m(\overrightarrow{\theta})>0$，从而可以得到 $\{T^k\overrightarrow{\theta}\in B_n$ 无穷次发生$\}\subset\{B_n=x$ 无穷次发生$\}$。由 poincare 常返定理知 $Q(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x)\geqslant\pi\{T^k\overrightarrow{\theta}\in B_n$ 无穷次发生$\}\geqslant\pi B_n\rightarrow 1,(n\rightarrow\infty)$，故 x 为强常返的。

例 设

$$A=\{\phi,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$$
$$X=\{a,b\},\ \Theta=\{0,1\},\ B=\{\{0\},\{1\},\phi,\Theta\}$$
$$P(0)=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix},\ P(1)=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

令

$$\overrightarrow{\Theta}=\Theta^z,\overrightarrow{B}=B^z,\ E=X\times\overrightarrow{\Theta}$$
$$\Xi=A\times\overrightarrow{B},\ \pi=\eta^z$$

其中 $\eta(\{0\})=\eta(\{1\})=\frac{1}{2}$，则 π 是 $(\overrightarrow{\Theta},\overrightarrow{B})$ 上的概率测度且满足 $\pi T^{-1}=\pi$，状态 a 既是正则本质的又是弱常返的。事实上，对 $\forall\overrightarrow{\theta}\in\overrightarrow{\Theta}$，简单的计算可以得到 $\sum_{k=1}^{\infty}p(\theta_{-n},\cdots,\theta_{-1};a,a)=\sum_{k=1}^{\infty}1=\infty$，由文献[4]中的定理 4.1 知 a 为正则本质的。

另一方面，注意到对任意的由 $\overrightarrow{\theta}\in\overrightarrow{\Theta}$，$L(\overrightarrow{\theta};a,a)\geqslant P(\theta_0;a,a)=1$ 可知 a 是强常返的也是弱常返的。

参 考 文 献：

[1] Cogburn R.Markov Chain in random environments:The case of Markovian environments[J].Ann Probab,1980,8:908-916.

[2] Cogburn R.On The Central Limit Theorem for Markov Chains in Random Environments[J].Ann Probab,1991,19:587-604.

[3] Cogburn R.On direct convergence and periodicity for transition probabilities of Markov Chains in random environments[J].Ann.Probab,1990,18:642-654.

[4] Cogburn R.The ergodic theory of Markov Chain in random environments[J].Zwahrsch Verw Gebietl,1984,66:109-128.

[5] Orey S.Markov Chain with stochastically stationary random environments[J].Ann Probab,1991,19:907-928.

[6] Foguel S R.The ergidic theory of Markov press[M].Princeton:Van Nostrand,1969.

[7] 孔生林.随机环境中马氏链的状态分类[J].安徽师范大学学报:自然科学版,2005,28(2):135-138.

[8] 肖争艳.绕积马氏链的状态分类[J].数学物理学报,2003,23(3):306-313.

[9] Nawrotzki K.Finite Markov chains in stationary random environment[J].Ann Probab,1981,10:1041-1046.

Study on States for Markov Chains in Ramdom Environments

CUI Jing

(College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: On the basic theory of Markov Chains, the properties and classification of states of Markov chains in random environments are discussed. First, the relationship between the essential states and properly essential states, and a sufficient condition of properly essential states are presented, based on this fact, the relationship between weak recurrence states and properly essential states is given. Finally, when the combined space is indecomposable, the state space is decomposed.

Key words: Markov chains in ramdom environments; properly essential; weakly recurrence; indecomposable