文章编号:1673-1549(2011)05-0548-04

变步长随机共振的微弱周期信号检测

向 林，李 健

(四川大学，成都 610065)

摘　要:在以朗之万方程建立的随机共振数学模型中,现有文献在求解该数学模型时都将计算步长取固定值,文章通过理论分析说明了固定步长的缺陷,提出了调节计算步长的检测方法。以双稳态随机共振系统为基础,把计算步长作为可调参数来讨论其对随机共振的影响,结果表明调节计算步长能有效地提高被检测信号的检测率。

关键词:变步长随机共振;计算步长 h;检测率;双稳系统

中图分类号:TN911.23　　**文献标识码**:A

引　言

随机共振(Stochastic Resonance)源于 Roberto Benzi 对地球冰冻周期(Ice Periodic)的研究[1],用来解释远古气象中每隔 10 万年左右冰冻期和暖气候期交替出现的现象。绝热近似理论和线性响应理论详细论证了产生随机共振的原理和条件[2-3]:当信号、噪声和非线性系统达到某种匹配关系时,噪声的增强反而有助于信号的检测。其中噪声是产生随机共振最重要的因素,因为与其它微弱信号检测方法相比,随机共振是利用噪声而非抑制噪声来检测信号,这是随机共振区别于其它检测方法的显著特点。在随机共振现象研究中,受微弱周期信号和高斯白噪声驱动的双稳系统是最典型的模型。因为双稳系统两个稳态之间形成的势垒能够通过自身结构参数方便地调节,所以衍生出了产生随机共振的两个基本方法:添加噪声[4]和调节系统结构参数[5]这两种方法。添加噪声是主动地给予信号适当的能量来跃迁系统形成的势垒;调节系统参数则是被动地改变系统形成的势垒来适配当前信号能量,从而实现信号和系统的共振。

数学模型上,随机共振双稳系统通过朗之万方程 Langevin Equation(LE)来表征,采用 Runge - Kutta 算法进行仿真。但是目前大多数文献在仿真时都采用固定计算步长这一常规化处理,忽略了计算步长这一参数对随机共振的影响。计算步长是指 Runge - Kutta 算法中的步长,它是根据采样频率而来,等于采样频率的倒数,相对于采样周期,只不过在随机共振中采样频率要求大于 50 倍信号频率。

所谓计算步长就是计算中的取值间隔(也就是取样周期)。在传统计算中,通常按照采样周期把取值点带入 Runge - Kutta 进行计算,而这一取值在计算中是保持不变的。而分析发现这一步长在计算中是可以改变的,对该参数的调节有助于提高特征信号的检测率。对比传统固定步长的检测结果,仿真结果也表明调节计算步长的检测率优于传统的检测方法。

1　h 对随机共振输出的影响

1.1　随机共振基本理论

双稳系统的朗之万方程为:

$$\bar{x} = ax - bx^3 + S + \sqrt{2D}\Gamma(t) \tag{1}$$

令 $Sn = S + \sqrt{2D}\Gamma(t)$,则

$$\bar{x} = ax - bx^3 + Sn$$

$\Gamma(t)$ 是均值为 0,方差为 1 的高斯白噪声,D 是噪声强度,S 是输入信号。

$$\begin{aligned} S &= A\sin(2\pi ft) \\ &= A\sin(2\pi \frac{f}{fs}k),k = 0,1,2,\cdots\cdots,N \end{aligned} \tag{2}$$

收稿日期:2011-07-26

基金项目:四川省应用基础研究项目(2008JY0048);西南交通大学信息编码与传输四川省重点实验室开放研究基金(LF08007)

作者简介:向 林(1985-),男,四川广安人,硕士生,主要从事弱信号检测、嵌入式开发方面的研究,(E-mail)xianglin134@163.com

$$fs \geqslant 50f \tag{3}$$

这是随机共振满足的 50 倍采样关系，fs 为采样频率（单位 Hz）

$$h = ts = \frac{1}{fs} \tag{4}$$

ts 为采样步长即对信号的采样周期，h 是 Runge－Kutta 算法的计算步长，它等于采样频率的倒数。如果用固定的采样频率采样信号，计算步长 h 在计算中就保持不变。

h 对 Runge－Kutta 方程的求解到底会产生如何的影响。先把方程（1）离散化求解[6]，

$$x_{i+1} - x_i = h(ax_i - bx_i + Sn_i) \tag{5}$$

$$x_{i+1} = (1 + ah - bhx_i)x_i + h \times Sn_i \tag{6}$$

Sn 是混有噪声的信号，a，b 是方程（1）中的结构化参数，x_i 就是信号经过 h 离散化的取值点。

1.2　h 对随机共振输出的影响

如果不考虑输入信号和噪声，则（6）式改为

$$x_{i+1} = (1 + ah - bhx_i)x_i \tag{7}$$

（7）式是一种递推关系，为保证该等式输出不发散，要求满足如下关系[7]

$$1 + ah - bhx_i > -1$$

即

$$|x_0| \leqslant x_{\lim} = \sqrt{\frac{ah+2}{bh}},\ (h \neq 0) \tag{8}$$

进一步化简为：

$$x_0 \leqslant \sqrt{\frac{a}{b} + \frac{2}{bh}} \tag{9}$$

这就是信号和 h 的关系，该关系制约着整个系统的稳定输出。

x_0 是系统初值，根据（8）式要求满足在 $(-x_{\lim}, x_{\lim})$ 范围内，且不等于 0，才能使递推关系（7）式输出稳定而不发散。x_0 在 $(-x_{\lim}, x_{\lim})$ 范围内取任何不等于 0 的值都将使输出分别趋近双稳系统的两个稳态 $\pm\sqrt{\frac{a}{b}}$。

根据（9）式，x_0 的取值范围，可以通过改变结构参数 a，b 和计算步长 h 而改变。假设系统结果参数 a，b 取值已经合理，那么 x_0 的取值范围就只受到计算步长 h 的影响（图 1）。

所以随机共振输出稳定性的问题就转化为初值 x_0 与 h 之间关系的问题。

根据（6）式和（7）式，还可以得出：x_i 的每一个取值，都可以看作是后面计算结果的取值。所有如果考虑信号和噪声的输入，噪声和信号可以改变系统初值的取值范围，进而影响结果。特别是噪声的输入，让系统初值叠加上了一个没有预期的输入，这个未知的输入对随机共振的检测的直接结果就是，该次检测信号将不被检测出来。从而影响信号的检测率。

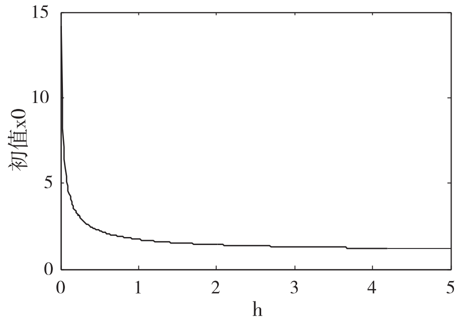

图 1　h 和初始值的关系

但是根据系统初值和计算步长 h 之间的关系，可以通过调节 h，信号更大可能地被检测，从而提高信号的检测率。

因此如果考虑信号和噪声的输入，信号幅值 A，噪声强度 D 都将被加入初始值而影响 h。特别是噪声的输入，因为噪声每次都是随机产生，相当于系统初值每次附加了一个随机值，所以需要调节 h 来改善由于噪声的输入而信号不能被检测的情况。

2　系统仿真

实验中，数据长度为 2 000 点，Runge－Kutta 仿真次数为 100。当信号频率在系统输出频谱中为最高峰时，认为信号可被检测出来，作为信号被检测标准。输入信号幅值等于 A＝0.03，频率等于 f＝0.02 Hz，输入信噪比等于 SNi＝－24 dB，双稳系统参数为 a＝0.18，b＝1，采样频率 fs＝2，比较 $h = 1/fs$，$h \neq 1/fs$ 时的随机共振结果。

如图 2 所示，当采样频率 fs＝2 时，输出频谱在 $h = 1/\mathrm{fs}$ 即 $h = 0.5$ 时取值点信号未被检测，这时保持输入信号参数不变，调节 h 至 0.7 取值点信号被检测。这一结果形象地说明了 h 对随机共振的影响，图 2 中（b）和（c）均产生随机共振，但是图 2（c）的结果明显好于图 2（b）的结果。所以 h 不能固定在 1/fs 取值点，它应该被看着一个可调参数。表 1 是调节 h，并在 h 取值点做 100 次仿真得到的信号检测率。

表 1　h 取值点上信号的检测率

h 值	0.1	0.4	0.5	0.7	1.1	1.4	1.6
检测率	0	0.11	0.3	0.54	0.49	0.29	X

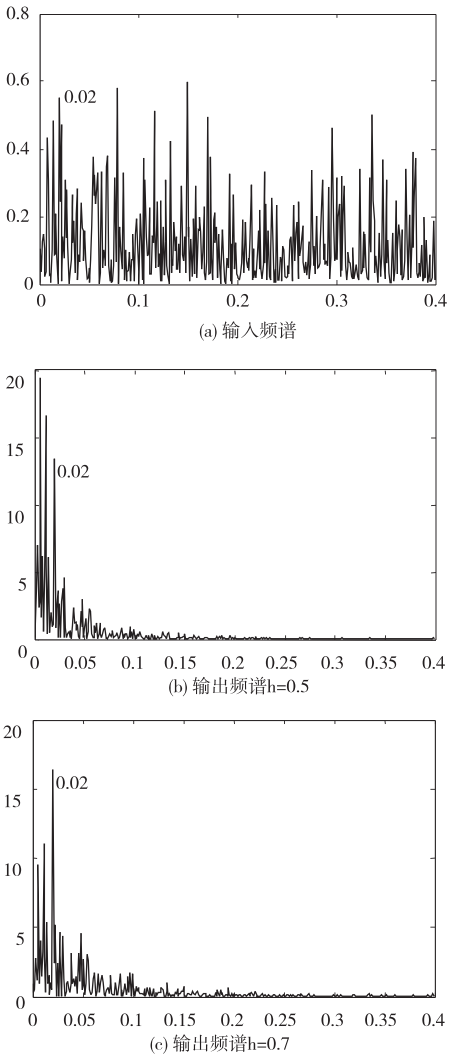

图 2 $h = 1/fs$ 和 $h \neq 1/fs$ 的输出频谱比较

由表 1 可知,在 $h = 0.5$ 取值点,检测率为 0.3,但是在 $h = 0.7$,检测率达到了 0.54,在 $h = 1.6$ 系统输出已经发散。结果表明相对于传统取值点的结果,调节 h 能提高信号的检测率,而且 h 存在一定取值范围,当 h 太小,信号不能被检测,当 h 太大,系统输出发散。

由于 $h = 1/fs$,为了讨论 h 对随机共振影响的普遍性,将输入信号用不同的采样频率进行采样,然后进行仿真。输入信号幅 A = 0.03,频率等于 f = 0.02 Hz,输入信噪比等于 SNi = −24 dB,双稳系统参数为 a = 0.18,b = 1,采样频率分 fs 别等于 8 Hz,4 Hz,2 Hz,1 Hz,0.8 Hz。如果固定 h,根据 h 与采样频率的关系,h 分别等于 0.128,0.25,0.5,1,1.25。h 的取值区间为(0.05,1.6),取值步长为 0.05,在每个 h 取值点作 100 次仿真。

图 3 结果表明:(1)当 $h < 0.1$ 时,每组信号输入系统后的检测率几乎等于零;当 $h > 1.4$,系统输出结果已经不稳定。如果按 $h = 1/fs$ 取值,对于较大采样频率,h 可能小于 0.1(如 $fs = 8$);同样对于较小采样频率,h 可能大于 1.4,这种情况应该通过调节计算步长 h 来产生随机共振。(2)用较大采样频率采样信号,h 取值范围较大,用较小采样频率采样信号,h 取值范围较小,而且随着采样频率的减小,最大检测率对应的 h 值也逐渐增大,h 取值范围也向右移动。(3)采样频率等于 8,4,2,1,0.8 对应的最大检测率的 h 值都不在 $h = 1/fs$ 时的最佳检测率,表 2 是对比结果。

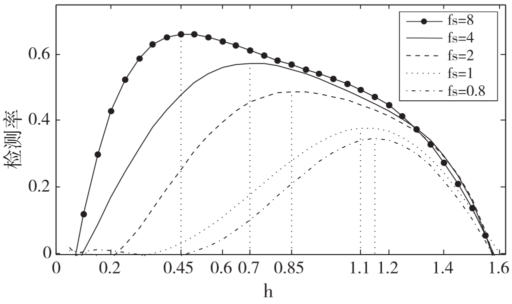

图 3 不同采样频率时 h 值变化规律

表 2 h 取值的参考

fs	h = 1/fs	检测率	最佳 h 值	对比检测率
10	0.10	0.18	0.40	0.69
9	0.11	0.09	0.35	0.31
8	0.13	0.13	0.50	0.66
7	0.14	0.20	0.50	0.51
6	0.17	0.14	0.65	0.43
5	0.20	0.27	0.60	0.63
4	0.25	0.26	0.70	0.59
3	0.33	0.14	0.75	0.38
2	0.5	0.29	0.95	0.52
1	1.0	0.39	1.10	0.41
0.8	1.25	0.33	1.15	0.34

3 结 论

论文分析了调节计算步长能够产生随机共振的原因,计算步长虽然按照采样频率的倒数取值,但是却受系统初值的影响。由于噪声的输入,使得系统初值与计算步长的关系发生改变,所以需要调节计算步长更大程度地产生随机共振;通过对比固定计算步长和变步长这两种方法的仿真结果,变步长方法得出信号更好的检测率。仿真得出了相当于传统计算步长的取值,得到了调节计算步长的参考取值点。根据图 3 也得到了计算步长的调节规律和趋势。而且特别是当采样频率很大的时候,计算步长取值会很低而不会产生随机共振,这时可以通过提高计算步长的方法来产生随机共振,这为利

用随机共振实现大频率信号检测提供了一个可以实施的方法。

参 考 文 献:

[1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A. The mechanism of stochastic resonance[J]. Joumal of Physics A:Mathematical and General, 1981, 14:L453-L457.

[2] 胡 岗.随机力与非线性系统[M].上海:上海科技教育出版社,1994.

[3] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, et al. Stochastic resonance[J]. Reviews of Modem Physica, 1998, 70(1):223-287.

[4] Anishchenko V S, Neiman A B, Mos F. Stochastic resonance:noise-enhanced order[J]. Physics-Uspekhi, 1999, 42(1):7-36.

[5] Xu Bohou, Li Jianlong, Zheng Jinyang. How to tune the system parameters to realize stochastic resonance[J]. J Phys A:Math Gen, 2003, 36:11969-11980.

[6] 姜健飞,胡良剑,唐 俭.数值分析及其 matlab 实验[M].北京:科学出版社,2004.

[7] 杨定新,胡茑庆.随机共振在微弱信号检测中的数值仿真[J].国防科技大学学报,2003,25(6):91-94.

Detection of Weak Periodical Signal Based on Step Varying Stochastic Resonance

XIANG Ling, *LI Jian*

(Sichuan University, Chengdu 610064, China)

Abstract: In now available literatures, the way of fixing the calculation step-value is adopted when solving the stochastic resonance mathmatical model based on Langevin Equation. The defect of fixing the calculation step-value is indicated through theoretical analysis, and the method of adjusting the calculation step-value is proposed consequently. On the basis of the bistable stochastic resonance system, the influence of varying calculation step-value to the effect of stochastic resonance is discussed, the results show that the detection rate of the signal can be effectively improved by regulating step-value.

Key words: stochastic resonance; calculation step-value h; detection rate; bistable system