

3 维 chemotaxis – fluid 方程弱解的整体存在性

刘天花

(电子科技大学数学科学学院, 成都 611731)

摘 要:针对具有非线性 3 维扩散 chemotaxis-fluid 模型,在其初边值问题基础上,提出了在 $m > 7/6$ 时该模型具有弱解整体存在性的论断。利用正则化问题的先验估计方法,给出了基于 chemotaxis-fluid 模型的 5 个引理并进行了证明,在此证明基础上,对所提论断进行了证明。

关键词:chemotaxis-fluid; 整体存在性; 有界性

中图分类号:TU375

文献标志码:A

引 言

设 Ω 为 \mathbb{R}^3 中具有光滑边界的有界区域。本文将考虑如下 chemotaxis – fluid 模型^[1-5]

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = \Delta n^m - \nabla \cdot (n\chi(c) \nabla c) \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - nf(c) \\ u_t + \nabla p - \eta \Delta u + n \nabla \varphi = 0 \\ \nabla \cdot u = 0 \end{cases} \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T] \quad (1)$$

在边界条件

$$\begin{cases} \partial_\nu n^m(x, t) = \partial_\nu c(x, t) = 0 \\ u(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0 \end{cases} \quad (2)$$

及初值条件

$$\begin{cases} n(x, 0) = n_0(x) \geq 0, c(x, 0) = c_0(x) \geq 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases} \quad (3)$$

之下弱解的整体存在性问题,其中 n 表示细菌的密度, $\chi(c)$ 表示趋化现象的敏感性测度, c 表示氧气的密度, φ 表示给定的势函数, u 表示流体的速度场, p 表示压强, η 表示粘度, $f(c)$ 表示细菌耗氧率, ν 为 $\partial\Omega$ 的单位外法向量。

对方程组(1), Lorz^[6]最近在 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 及 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中证明了弱解的局部存在性; Liu and Lorz^[7]在 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中证明了当 $m \in (\frac{4}{3}, 2)$ 时弱解的整体存在性; Tao –

Winkler^[8]证明了当 $m > 1$ 时,方程组(1)在 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 弱解的整体存在性. 更近地, Duan – Xiang^[9]证明了对任意的 $m \geq 1$, 方程组(1)在 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 及 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中都存在整体弱解; Tao – Winkler^[10]证明了当 $m > \frac{8}{7}$ 时,方程组(1)在 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 弱解的整体存在性。

由于当 $m > 1$ 时,方程组(1)可能退化,按如下方式定义弱解:

定义 1 若 (n, c, u, p) 是满足

$$\begin{cases} n \in L^\infty(\Omega \times (0, T)), \nabla n^m \in L^2((0, T); L^2(\Omega)), \\ n_t \in L^2((0, T); W^{1,2}(\Omega)) \\ c \in L^\infty(\Omega \times (0, T)) \cap L^2((0, T); W^{2,2}(\Omega)) \cap \\ W^{1,2}((0, T); L^2(\Omega)) \\ u \in L^2((0, T); W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)) \end{cases}$$

并对任意具有紧支集的 $\varphi_1, \varphi_2 \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3)$, $\varphi_3 \in C^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ 且 $\nabla \cdot \varphi_3 = 0$ 都有

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega n_t \cdot \varphi_1 dxdt - \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi_1 \cdot u \cdot n dxdt + \\ & \int_0^T \int_\Omega n^m \Delta \varphi_1 dxdt = \int_0^T \int_\Omega \nabla (\chi(c) \nabla c) \cdot \nabla \varphi_1 dxdt \\ & \int_0^T \int_\Omega c \varphi_2 dxdt - \int_0^T \int_\Omega \nabla \varphi_2 \cdot u \cdot c dxdt + \\ & \int_0^T \int_\Omega \nabla c \cdot \nabla \varphi_2 dxdt = - \int_0^T \int_\Omega nf(c) \varphi_2 dxdt \\ & \int_0^T \int_\Omega u \cdot \partial_t \varphi_3 dxdt - \int_0^T \int_\Omega u_0 \varphi_3 dxdt - \end{aligned}$$

收稿日期:2012-09-10

基金项目:教育部留学回国人员科研启动基金(2011)

作者简介:刘天花(1989-),女,重庆开县人,硕士生,主要从事偏微分方程及图像处理方面的研究,(E-mail)th1230@gmail.com

$$\int_0^T \int_{\Omega} u \cdot \Delta \varphi_3 dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} n \nabla \varphi \varphi_3 dx dt = 0$$

成立,则称 (n, c, u, p) 是 $\Omega \times (0, T]$ 上的一个弱解;如果 (n, c, u, p) 对任意的 $T \in (0, \infty)$ 在 $\Omega \times (0, T)$ 上都是初边值问题(1)~(3)的弱解,那么就称 (n, c, u, p) 是一个整体弱解。

值得指出的是,文献[7,9]假设了 $(\chi(c)f(c))'(c) > 0$ 及 $(f(c)/\chi(c))''(c) > 0$ 。在本文中,将借助于文献[8]的方法去掉这两个假设,研究方程组(1)在 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 中弱解的整体存在性。具体地说,仅需如下基本假设:

$$\chi \in C^1([0, \infty)), f \in C^1([0, \infty)), f(0) = 0$$

$$f(c) > 0(c > 0), \varphi \in W^{1,\infty}(\Omega) \tag{4}$$

$$n_0 \in C^1(\bar{\Omega}), c_0 \in C^1(\bar{\Omega}), c_0 \geq 0, u_0 \in D(A) \tag{5}$$

$$\|n_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq K, \|c_0\|_{W^{1,\infty}(\Omega)} \leq K$$

$$\|A^{\theta} u_0\| \leq K(K > 0, \theta > 0) \tag{6}$$

其中 Stokes 算子 A 是在 Hilbert 空间

$$L_{\sigma}^2(\Omega) := \{u \in L^2(\Omega) \mid \nabla \cdot u = 0 \text{ 在 } D'(\Omega) \text{ 里}\}$$

Ω 上的所有螺线向量,其中 $D(A) = W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega) \cap L_{\sigma}^2(\Omega)$ [11]。

本文的主要结果如下:

定理 1 在假设式(4)、式(5)和式(6)下,对任意给定的 $m > \frac{7}{6}$, 初边值问题(1)~(3)存在整体弱解 (n, c, u, p) , 且当 $n \geq 0, c \geq 0$ 时 (n, c, u) 在 $L^{\infty}(\Omega \times (0, \infty))$ 上是有界的。

1 正则化问题的先验估计

由于方程组(1)的退化性,我们首先考虑它的正则化问题:

$$\begin{cases} n_t + u \cdot \nabla n = \nabla \cdot (D(n) \nabla n) - \nabla \cdot (n \chi(c) \nabla c), x \in \Omega, t > 0 \\ c_t + u \cdot \nabla c = \Delta c - n f(c), x \in \Omega, t > 0 \\ u_t + \nabla p - \eta \Delta u + n \nabla \varphi = 0, x \in \Omega, t > 0 \\ \nabla \cdot u = 0, x \in \Omega, t > 0 \\ D(n) \partial_{\nu} n(x, t) = \partial_{\nu} c(x, t) = 0, u(x, t) = 0, x \in \partial \Omega, t > 0 \\ n(x, 0) = n_0(x), c(x, 0) = c_0(x), u(x, 0) = u_0(x), x \in \Omega \end{cases} \tag{7}$$

其中

$$D \in C^1([0, \infty)) \text{ 且 } D(s) \geq D_0 s^{m-1} (s \geq 0, D_0 > 0, m > 1) \tag{8}$$

由分部积分及抛物型方程比较原理容易证明如下结果:

引理 1 假设 $D, (n_0, c_0, u_0)$ 满足条件式(5)、式(6)和式(8)且 (n, c, u, p) 是满足初边值问题(7)在 $\Omega \times (0, T) (T \in (0, \infty))$ 上的古典解,则对任意给定的 $D_0 > 0, m > 1$ 都有 $n \geq 0, c \geq 0$ 且

$$\|n(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|n_0\|_{L^1(\Omega)}, \|c(t)\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq \|c_0\|_{L^{\infty}(\Omega)} t \in (0, T) \tag{9}$$

引理 2 假设 $D, (n_0, c_0, u_0)$ 满足条件式(5)、式(6)和式(8)且 (n, c, u, p) 是满足初边值问题(7)在 $\Omega \times (0, T) (T \in (0, \infty))$ 上的古典解,则对任意给定的 $m > 1, D_0 > 0, p > \frac{3}{2}, \gamma > \max\{3, m - 1 + \frac{1}{p}\}, K > 0,$

存在 $C > 0,$ 使得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} n^{\gamma} dx + \frac{1}{C} \int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx \leq C$$

$$C \left\{ \int_{\Omega} (|\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2)^{\frac{6(-m+\gamma+1)-6}{3m+3\gamma-4}} dx + 1 \right\} \cdot$$

$$\left\{ \left(\int_{\Omega} |\Delta c|^2 \right)^{\frac{3}{p}-1} dx + 1 \right\} t \in (0, T)$$

证明 将问题(7)中第一个方程两边同乘以 $n^{\gamma-1}$, 并在 Ω 上积分可得

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} n^{\gamma} dx = -(\gamma - 1) \int_{\Omega} D(n) |\nabla n|^2 n^{\gamma-2} dx +$$

$$(\gamma - 1) \int_{\Omega} n^{\gamma-1} \chi(c) \nabla c \cdot \nabla n dx \leq$$

$$-D_0(\gamma - 1) \int_{\Omega} n^{m+\gamma-3} |\nabla n|^2 dx +$$

$$(\gamma - 1) \int_{\Omega} n^{\gamma-1} \chi(c) \nabla c \cdot \nabla n dx$$

这里利用 $\nabla \cdot u = 0$ 与 $D(s) \geq D_0 s^{m-1}$, 对右端第二项由 Young 不等式可得

$$(\gamma - 1) \int_{\Omega} n^{\gamma-1} \chi(c) \nabla c \cdot \nabla n dx \leq$$

$$\frac{D_0(\gamma - 1)}{2} \int_{\Omega} n^{m+\gamma-3} |\nabla n|^2 dx +$$

$$\frac{(\gamma - 1) \|\chi\|_{L^{\infty}(\Omega)}^2}{2D_0} \int_{\Omega} n^{-m+\gamma+1} |\nabla c|^2 dx$$

从而

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} n^{\gamma} dx + C_1 \int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx \leq$$

$$C_2 \int_{\Omega} n^{-m+\gamma+1} |\nabla c|^2 dx t \in (0, T)$$

其中 C_1, C_2 仅依赖于 $m, D_0, p, \gamma, \Omega$ 及初值. 由 Holder 不等式可得

$$\int_{\Omega} n^{-m+\gamma+1} |\nabla c|^2 dx \leq$$

$$\left(\int_{\Omega} n^{-(m+\gamma+1)p} dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\nabla c|^{2p'} dx \right)^{\frac{1}{p'}} =$$

$$\|n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}\|_{L^{\frac{2(-m+\gamma+1)p}{m+\gamma-1}}(\Omega)} \cdot \|\nabla c\|_{L^{p'}(\Omega)}^2$$

其中 $p' = \frac{p}{p-1}$. 再由 Gagliardo - Nirenberg 内插不等式[12]有

$$\|n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}\|_{L^{\frac{2(-m+\gamma+1)p}{m+\gamma-1}}(\Omega)} \leq$$

$$C_3 \|\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}\|_{L^2(\Omega)}^a \cdot \|n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}\|_{L^{\frac{2(m+\gamma+1)}{m+\gamma-1}}(\Omega)}^{2(1-a)} +$$

$$C_3 \|n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}\|_{L^{\frac{2(-m+\gamma+1)}{m+\gamma-1}}(\Omega)}$$

其中 $a = \frac{1}{p} - \frac{(-m + \gamma + 1)}{(-m + \gamma + 1)} \cdot \frac{3(m + \gamma - 1)}{1 - 3(m + \gamma - 1)}$, 因 $0 < a < 1$, 得 $\gamma > m - 1 + \frac{1}{p}$. 于是存在 $C_4 > 0$, 使得

$$\left\| n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}(\cdot, t) \right\|_{L^{\frac{2(-m+\gamma+1)}{m+\gamma-1}}(\Omega)}^{\frac{2(-m+\gamma+1)}{m+\gamma-1}} \leq C_4 \left\| \nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}(\cdot, t) \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{6(-m+\gamma+1)-\frac{2}{p}}{3m+3\gamma-4}} + C_4 t \in (0, T)$$

类似地运用 Gagliardo - Nirenberg 内插不等式^[13]并结合(9)式可知: 存在 $C_5 > 0$, 使得

$$\left\| \nabla c \right\|_{L^{2p'}(\Omega)}^2 \leq C_5 \left\| \Delta c \right\|_{L^2(\Omega)}^{2(\frac{3}{p}-1)} + C_5 t \in (0, T)$$

仿照 Tao - Winker 中 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的情形^[4], 可以证明如下两个引理:

引理 3 假设 $D, (n_0, c_0, u_0)$ 满足条件(5)(6)(8)且 (n, c, u, p) 是满足初边值问题(7)在 $\Omega \times (0, T)$ ($T \in (0, \infty)$) 上的古典解, 则对任意给定的 $D_0 > 0, m > 1, \gamma > 1$ 存在 $C > 0$, 使得

$$\|u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)} \leq C + C \cdot \sup_{s \in (0, T)} \|n(\cdot, s)\|_{L^2(\Omega)} t \in (0, T)$$

引理 4 假设 $D, (n_0, c_0, u_0)$ 满足条件式(5)、式(6)和式(8)且 (n, c, u, p) 是满足初边值问题(7)在 $\Omega \times (0, T)$ ($T \in (0, \infty)$) 上的古典解, 则对任意给定的 $m > 1, D_0 > 0, K > 0, \gamma > 3$, 则存在 $C > 0, k \in (0, 1)$, 使得

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta c|^2 dx \leq C \left(\int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx \right)^{\frac{2}{m+\gamma-2}} +$$

$$C \cdot \left(\sup_{s \in (0, T)} \int_{\Omega} n^\gamma(\cdot, s) dx \right)^k + Ct \in (0, T)$$

引理 5 假设 $D, (n_0, c_0, u_0)$ 满足条件式(5)、式(6)和式(8)且 (n, c, u, p) 是满足初边值问题(7)在 $\Omega \times (0, T)$ ($T \in (0, \infty)$) 上的古典解, 则对任意给定的 $m > \frac{7}{6}, D_0 > 0, K > 0, \gamma > \max\{3, m - 1\}$, 存在 $C > 0, k \in (0, 1)$, 使得

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} n^\gamma dx + \frac{1}{C} \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx \right\} +$$

$$\frac{1}{C} \left\{ \int_{\Omega} n^\gamma dx + \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx \right\} +$$

$$\frac{1}{C} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta c|^2 dx \right\} \leq$$

$$C + C \cdot \left(\sup_{s \in (0, T)} \int_{\Omega} n^\gamma(\cdot, s) dx \right)^k t \in (0, T)$$

证明 给定 $\gamma > \max\{3, m - 1\}$, 假设 $\alpha(\xi) := \frac{3[(-m + \gamma + 1) - \xi]}{3(m + \gamma - 1) - 1}, \beta(\xi) := \xi(\xi > 0)$, 又由 $m > \frac{7}{6}$ 得 $\alpha(0) + \beta(0) = \frac{3(-m + \gamma + 1)}{3(m + \gamma - 1) - 1} < 1$, 进一步选取 $\xi_0 \in (0, 1)$, 使得 $\alpha(\xi) + \beta(\xi) < 1, \xi \in (0, \xi_0)$, 再选

取 $p > 1$, 使得 $p > \frac{1}{\xi_0}$ 且 $\gamma > m - 1 + \frac{1}{p}$, 则由 $\alpha := \alpha(\frac{1}{p}), \beta := \beta(\frac{1}{p})$, 可知 $\alpha + \beta < 1$, 结合引理 2, 引理 4 可知: 存在 $C_1 > 0, C_2 > 0, k \in (0, 1)$, 使得

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} n^\gamma dx + \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx \right\} +$$

$$C_1 \left\{ \int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta c|^2 dx \right\} \leq$$

$$C_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx \right)^\alpha \cdot \left(\int_{\Omega} |\Delta c|^2 dx \right)^\beta +$$

$$C_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx \right)^{\frac{2}{m+\gamma-2}} + C_2 \left(\int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx \right)^\alpha +$$

$$C_2 \left(\int_{\Omega} |\Delta c|^2 dx \right)^\beta +$$

$$C_2 \left(\sup_{s \in (0, T)} \int_{\Omega} n^\gamma(\cdot, s) dx \right)^k + C_2 t \in (0, T)$$

因

$$\frac{2}{m + \gamma - 2} < 1, \alpha < 1, \beta < 1$$

由 Young 不等式知: 存在 $C_3 > 0$, 使得

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} n^\gamma dx + \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx \right\} +$$

$$\frac{C_1}{2} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta c|^2 dx \right\} \leq$$

$$C_3 + C_2 \left(\sup_{s \in (0, T)} \int_{\Omega} n^\gamma(\cdot, s) dx \right)^k t \in (0, T)$$

再由 Gagliardo - Nirenberg 内插不等式和 Young 不等式有

$$\int_{\Omega} n^\gamma dx = \left\| n^{\frac{m+\gamma-1}{2}} \right\|_{L^{\frac{2\gamma}{m+\gamma-1}}(\Omega)}^{\frac{2\gamma}{m+\gamma-1}} \leq$$

$$C_4 \left\| \nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(\gamma-1)}{3(m+\gamma-1)-1}} \cdot \left\| n^{\frac{m+\gamma-1}{2}} \right\|_{L^{\frac{2}{m+\gamma-1}}(\Omega)}^{\frac{\gamma-3(m+\gamma-1)}{-3\gamma(m+\gamma-1)+\gamma}} +$$

$$C_4 \left\| n^{\frac{m+\gamma-1}{2}} \right\|_{L^{\frac{2\gamma}{m+\gamma-1}}(\Omega)}^{\frac{2\gamma}{m+\gamma-1}} \leq C_5 \left\| \nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}} \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{2(\gamma-1)}{3(m+\gamma-1)-1}} + C_5 \leq$$

$$C_6 \int_{\Omega} \left| \nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}} \right|^2 dx + C_6$$

类似地, 可知: 存在 $C_7 > 0$, 使得

$$\int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx \leq C_7 \int_{\Omega} |\Delta c|^2 dx + C_7, \text{ 于是得}$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_{\Omega} n^\gamma dx + \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx \right\} +$$

$$\frac{C_1}{4} \left\{ \int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx + \int_{\Omega} |\Delta c|^2 dx \right\} +$$

$$\frac{C_1}{4C_6} \int_{\Omega} n^\gamma dx + \frac{C_1}{4C_7} \int_{\Omega} |\nabla c|^2 dx \leq \frac{C_1}{2} + C_3 +$$

$$C_2 \left(\sup_{s \in (0, T)} \int_{\Omega} n^\gamma(\cdot, s) dx \right)^k t \in (0, T)$$

推论 1 假设 $D, (n_0, c_0, u_0)$ 满足条件(5)(6)(8)且 (n, c, u, p) 是满足初边值问题(7)在 $\Omega \times (0, T)$ ($T \in (0, \infty)$) 上的古典解, 则对任意给定 $m > \frac{7}{6}, D_0 > 0, K$

> 0, $\gamma > \max\{3, m - 1\}$, 存在 $C > 0$, 使得

$$\int_{\Omega} n^{\gamma}(x, t) dx \leq C, \int_{\Omega} |\nabla c(x, t)|^2 dx \leq C$$

且

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\nabla n^{\frac{m+\gamma-1}{2}}|^2 dx dt \leq C(1+t) t \in (0, T)$$

推论 2 假设 $D, (n_0, c_0, u_0)$ 满足条件(5)(6)(8) 且 (n, c, u, p) 是满足初边值问题(7)在 $\Omega \times (0, T)$ ($T \in (0, \infty)$) 上的古典解, 则对任意给定的 $m > \frac{7}{6}, D_0 > 0, K > 0$, 存在 $C > 0$, 使得

$$\|n\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq Ct \in (0, t)$$

2 主要结论的证明

对于定理 1, 为了得到初边值问题(1)~(3)的整体弱解, 考虑其如下逼近解:

$$\begin{cases} n_{\varepsilon t} + u_{\varepsilon} \cdot \nabla n_{\varepsilon} = \nabla \cdot (D_{\varepsilon}(n_{\varepsilon}) \nabla n_{\varepsilon}) - \\ \nabla \cdot (n_{\varepsilon} \chi(c_{\varepsilon}) \nabla c_{\varepsilon}) x \in \Omega, t > 0 \\ c_{\varepsilon t} + u_{\varepsilon} \cdot \nabla c_{\varepsilon} = \Delta c_{\varepsilon} - n_{\varepsilon} f(c_{\varepsilon}) x \in \Omega, t > 0 \\ u_{\varepsilon t} + \nabla p_{\varepsilon} - \eta \Delta u_{\varepsilon} + n_{\varepsilon} \nabla \varphi = 0 x \in \Omega, t > 0 \\ \nabla \cdot u_{\varepsilon} = 0 x \in \Omega, t > 0 \\ \partial_{\nu} n_{\varepsilon}(x, t) = \partial_{\nu} c_{\varepsilon}(x, t) = 0, u_{\varepsilon}(x, t) = 0, x \in \partial\Omega, t > 0 \\ n_{\varepsilon}(x, 0) = n_{0\varepsilon}(x), c_{\varepsilon}(x, 0) = c_{0\varepsilon}(x), x \in \Omega, \\ u_{\varepsilon}(x, 0) = u_{0\varepsilon}(x) x \in \Omega \end{cases}$$

其中 $D_{\varepsilon}(s) := m(s + \varepsilon)^{m-1} (s \geq 0)$. 由上一节正则化问题的先验估计可知: 且

$$\|\nabla c_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq C, \|u_{\varepsilon}\|_{L^{\infty}(\Omega)} \leq C \text{ 且 } \|\nabla u_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)} \leq C$$

故当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $n_{\varepsilon}, c_{\varepsilon}$ 在 $\Omega \times (0, \infty)$ 上收敛到 n, c ; ∇n_{ε} 在 $L^2_{loc}(\bar{\Omega} \times [0, \infty))$ 上收敛到 $\nabla n^m, \nabla c$; u_{ε} 在 $L^2_{loc}([0, \infty), W^{1,2}(\Omega))$ 上弱收敛到 u , 且 (n, c, u) 是满足初边值问题(7)的弱解。同时根据引理 2, 引理 4 及推论 2 可知 (n, c, u) 的有界性。

参考文献:

[1] Vzquez J L. Oxford Mathematical Monographs[M]. Oxford:Oxford University Press,2007.
 [2] Calvez V, Carrillo J A. Volume effects in the Keller-Seg-

el model: Energy estimates preventing blow-up [J]. J. Math.,2006,86(9),155-175.
 [3] Kowalczyk R. Preventing blow-up in a chemotaxis model [J]. J. Math.,2005,305:566-585.
 [4] M Di Francesco, Lorz A, Markowich P. Chemotaxis-fluid coupled model for swimming bacteria with nonlinear diffusion: Global existence and asymptotic behavior [J]. Discrete Cont. Dyn. Syst.,2010,(28):1437-1453.
 [5] Szymanska Z, Morales Rodrigo C, Lachowicz M, et al. Mathematical modelling of cancer invasion of tissue: The role and effect of nonlocal interactions, Math [J]. Mod. Meth. Appl. Sci.,2009,(19):257-281.
 [6] Lorz A. Coupled chemotaxis-fluid model [J]. Math. Mod. Meth. Appl. Sci.,2010,(20):987-1004.
 [7] Liu J G, Lorz A. A coupled chemotaxis-fluid model: Global existence [J]. Am. I. H. Poincare,2011,(28):643-652.
 [8] Tao Y, Winkler M. Global existence and boundedness in a Keller-Segel model with arbitrary porous medium diffusion [J]. Discret Cont. Dyn. Sys.-A,2012,(32):1901-1914.
 [9] Duan R, Xiang Z. A note on global existence for the chemotaxis-Stokes model with nonlinear diffusion [EB/OL]. Preprint. <http://www.math.cuhk.edu.hk/~rjduan/Publications.html>.
 [10] Tao Y, Winkler M. Locally bounded global solutions in a three-dimensional chemotaxis-Stokes system with nonlinear diffusion [ER/OL]. <http://dx.doi.org/1016/j.anihpc.2012.07.002>.
 [11] Sohr H. The Navier-Stokes Equations. An Elementary Functional Analytic Approach, Birkh user Advanced Texts:Basler Lehrbucher [M]. Birkhauser Verlag, Basel, 2001.
 [12] Nirenberg L. An extended interpolation inequality [J]. Ann. Scuola Norm. Sup.,1966,20(3):733-737.
 [13] Friedman A. Partial Differential Equations [M]. New York: Dover Publications Inc,1969.

Global Existence of Weak Solutions to 3D Chemotaxis-Fluid Model

LIU Tian-hua

(School of Mathematics Science, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

Abstract: Based on the nonlinear 3D diffusion chemotaxis-fluid model and the initial boundary value problems, the existence judge of weak global solution was put forward when $m > 7/6$. Using the priori estimate method of regularization problem, five lemma and their proofs of the chemotaxis-fluid model were given. On this basis, the proposed thesis is verified.

Key words: chemotaxis-fluid; global existence; boundedness