

# 一阶时滞差分方程反周期解的存在性

周永强,王家正,丁一鸣

(合肥师范学院数学系,合肥 230061)

**摘要:**以 Leray - schauder 非线性抉择为工具,研究了一阶含参时滞差分方程反周期解的存在性,获得了当参数在一定范围取值时反周期解的存在性结果,得到了反周期解存在的充分条件,并通过实例表明结果的可行性。

**关键词:**时滞差分方程;反周期解;Leray - schauder 非线性抉择

**中图分类号:**O175.7

**文献标志码:**A

## 引言

近年来,关于一阶时滞差分方程:

$$x_{n+1} = a_n x_n + f(n, x_{n-\tau(n)}), n \in Z \quad (1)$$

正周期解的存在性及多解性的研究很多<sup>[1-7]</sup>。时滞差分方程(1)在电路信号系统、生态系统、传染病动力系统和自动化控制系统等重要领域中具有广泛的应用背景。因此,有关时滞差分方程的研究无论在理论上还是在应用上均具有非常重要的意义。

特别地,文献[8]研究了一阶时滞差分方程(1)正周期解的存在性。该文利用两点拉伸型不动点定理给出方程(1)正周期解存在性的充分条件。

然而,由于反周期解现象广泛存在于自然界中,特别地,反周期解的存在性等价于所研究问题倍周期变号解的存在性。方程

$$x_{n+1} = a_n x_n + \lambda b_n f(n, x_{n-\tau(n)}), n \in Z \quad (2)$$

反周期解的存在性还没有被讨论过。鉴于此,本文考虑含参时滞差分方程(2)反周期解的存在性,其研究结果将会进一步丰富差分方程(2)解的存在性理论。

本文总假定

**H1:**  $\lambda \in R$  为参数,  $\{a_n\}_{n \in Z}, \{b_n\}_{n \in Z}$  均为  $\omega$ -周期序列,且  $\prod_{s=0}^{\omega-1} a_s^{-1} > 1, \prod_{s=0}^{\omega-1} b_s^{-1} > 1, \{\tau(n)\}_{n \in Z}$  是一

个整值  $\omega$ -周期序列。

**H2:**  $f(n, u)$  是实连续函数,且  $f(n + \omega, u) = -f(n, u)$ 。

本文主要工具为 Leray - schauder 非线性抉择。

**引理 1**<sup>[9]</sup> 假设  $B$  为 Banach 空间,  $E \subset B$  为一个有界闭凸集,  $U \subset E$  为  $E$  中的相对开集且  $\theta \in U$ , 若  $S: \bar{U} \rightarrow E$  为全连续算子,则下面结论之一成立:

- (i)  $S$  在  $\bar{U}$  中至少有一个不动点。
- (ii) 存在  $u \in \partial U, \mu \in (0, 1)$  使得  $u = \mu Su$ 。

## 1 预备知识

利用 Leray - schauder 非线性抉择这一工具给出方程(2)反周期解存在性的充分条件,方程(2)可以看成

$$x(t) = a(t)x(t) + \lambda b(t)f(t, x(t - \tau(t)))$$

的离散形式。令

$$X = \{x \in C(R, R) : x(t + \omega) = -x(t), t \in R\}$$

其在范数  $\|x\| = \text{Sup}_{t \in [0, \omega]} |x(t)|$  下构成 Banach 空间。

定义算子  $T_\lambda: X \rightarrow X$ 。

$$(T_\lambda x)(s) = \lambda \sum_{s=n}^{n+\omega-1} G(n, s) b(s) f(s, x_{s-\tau(s)}) \quad (3)$$

其中,

$$G(n, s) = \left( \prod_{k=n}^s \frac{1}{a_k} \right) \left( \prod_{k=0}^{\omega-1} \frac{1}{a_k} - 1 \right)^{-1}$$

$$s \in [n, n + \omega - 1]$$

且有

$$G(n, n) = G(n + \omega, n + \omega)$$

$$G(n, n + \omega - 1) = G(0, \omega - 1)$$

当  $n \leq s \leq n + \omega - 1$  时,

$$0 < m = \min_{n \leq i \leq n + \omega - 1} G(n, i) \leq G(n, s) \leq$$

$$\max_{n \leq i \leq n + \omega - 1} G(n, i) = M < +\infty$$

**引理 2** 假设 (H1)、(H2) 成立, 则  $T_\lambda: X \rightarrow X$  为全连续算子。

**证明** 首先, 对  $\forall x \in X$ , 显然,  $T_\lambda x$  连续, 且有

$$(T_\lambda x)(s + \omega) =$$

$$\lambda \sum_{s=n+\omega}^{n+2\omega-1} G(n + \omega, s) b(s) f(s, x_{s-\tau(s)}) =$$

$$- \lambda \sum_{s=n}^{n+\omega-1} G(n, s) b(s) f(s, x_{s-\tau(s)}) =$$

$$- (T_\lambda x)(s)$$

因此,  $T_\lambda: X \rightarrow X$ 。由 Arzela - Ascoli 定理<sup>[10]</sup> 易证  $T_\lambda: X \rightarrow X$  全连续。

**引理 3** 假设 (H1)、(H2) 成立, 则  $x$  是方程 (2) 的解当且仅当  $x$  是  $T_\lambda$  的不动点。

**证明** 充分性 由方程 (3) 可知

$$x(s) = \lambda \sum_{s=n}^{n+\omega-1} G(n, s) b(s) f(s, x_{s-\tau(s)}) =$$

$$a(s)x(s) + \lambda b(s)f(s, x_{s-\tau(s)})$$

所以,  $T_\lambda$  的不动点是方程 (2) 的解。

必要性 若  $x$  是方程 (2) 的解, 则有

$$\lambda b(s)f(s, x_{s-\tau(s)}) = a(s)x(s) - x(s)$$

因此,

$$(T_\lambda x)(s) = \lambda \sum_{s=n}^{n+\omega-1} G(n, s) b(s) f(s, x_{s-\tau(s)}) =$$

$$\lambda \sum_{s=n}^{n+\omega-1} G(n, s) (a(s)x(s) - x(s)) =$$

$$x(s)$$

故方程 (2) 的  $x$  是  $T_\lambda$  的不动点。

**引理 4** 假设存在不依赖于  $\mu \in (0, 1)$  的常数  $K > 0$ , 使得对任意  $\mu \in (0, 1)$  方程

$$x(t) = a(t)x(t) + \mu \lambda b(t)f(t, x(t - \tau(t))) \quad (4)$$

的所有可能解  $x$  均满足  $\|x\| \neq K$ , 则方程 (2) 至少存在一个解。

**证明** 由引理 1 易证。

## 2 主要结论与证明

**定理 1** 假定 (H1)、(H2) 成立, 且存在正常数  $a_1, a_2$ , 使得  $|f(s, x)| \leq a_1|x| + a_2, x \in R$  若

$$-\frac{1}{a_1 M b \omega} < \lambda < \frac{1}{a_1 M b \omega} \quad (5)$$

则方程 (2) 至少存在一个  $\omega$  - 反周期解。

**证明** 由引理 4 可知, 只需证明存在不依赖于  $\mu \in (0, 1)$  的常数  $K > 0$ , 使得方程 (4) 的所有可能解  $x$  均满足  $\|x\| \neq K$ 。若  $x$  是方程 (4) 的解, 则

$$|x(s)| = \left| \mu \lambda \sum_{s=n}^{n+\omega-1} G(n, s) b(s) f(s, x_{s-\tau(s)}) \right| <$$

$$|\lambda| \sum_{s=n}^{n+\omega-1} G(n, s) |b(s)| |f(s, x_{s-\tau(s)})| \leq$$

$$a_1 |\lambda| \|b\| M \|x\| \omega + a_2 |\lambda| \|b\| M \omega$$

其中,  $n \in Z$ 。因此, 结合 (5) 式可得

$$\|x\| < \frac{a_2 |\lambda| \|b\| M \omega}{1 - a_1 |\lambda| \|b\| M \omega} \neq K$$

由引理 4 可知方程 (2) 至少存在一个  $\omega$  - 反周期解。

**推论 1** 假定 (H1)、(H2) 成立, 若存在正常数  $\bar{K}$ , 使得  $|f(s, x)| \leq \bar{K}, x \in R$  则方程 (2) 至少存在一个  $\omega$  - 反周期解。

**证明** 由定理 1 易证。

## 3 应用

**例** 考虑一阶时滞差分方程

$$x_{n+1} = (\sin nx + 1)x_n +$$

$$\lambda \cos nx \sin \frac{n(x(n - \sin nx))}{2}, n \in Z$$

其中,  $\lambda \in R$ , 容易验证

$$\{a_n\}_{n \in Z} = \sin nx + 1 > 0$$

$$\{b_n\}_{n \in Z} = \cos nx, \tau(n) = \sin nx$$

均为  $2\pi$  - 周期连续函数。 $f(n, x) = \sin \frac{nx}{2}$  是实连续函数且  $f(n + 2\pi, x) = -f(n, x), |f(n, x)| \leq 1, x \in R$ , 因此, 由推论 1 可知, 时滞差分方程至少存在一个  $2\pi$  - 反周期解。

## 4 结束语

本文利用 Leray - schauder 非线性抉择这一工具给出方程 (2) 反周期解存在性的充分条件, 仅考虑当  $|f(s, x)| \leq a|x| + b (a, b$  为正常数) 的情形, 针对  $f(n, x)$  满足其他条件的情形还有待于以后进一步研究。

## 参考文献:

- [1] 高英, 张广, 葛渭高. 时滞差分方程周期正解的存在性[J]. 系统科学与数学, 2003, 23(2): 155-162.
- [2] Zhang R Y, Wang Z C, Chen Y. Periodic solutions of a

- single species discrete population model with periodic stock, *Comput[J]. Math Appl*, 2000, 39: 77-90
- [3] Zhang Z Y. An algebraic principle for the stability of difference operators[J]. *J Diff Eqns*, 1997, 136: 236-247.
- [4] Agarwal R P, Pang P Y H. On a generalized difference system[J]. *Nonlinear Anal*, 1997, 30: 365-376.
- [5] Katsunori I. Asymptotic analysis for linear difference equations, *Trans [J]. Amer Math Soc*, 1997, 349: 4107-4142.
- [6] 武女则. 含参数 Logistic 时滞差分方程概周期正解的存在性[J]. *西华大学学报: 自然科学版*, 2011, 30(3): 66-68.
- [7] 欧阳瑞, 陈春华. 二阶中立型时滞差分方程的振动性与正解存在性[J]. *四川理工学院学报: 自然科学版*, 2011, 24(2): 145-147.
- [8] 康淑瑰. 时滞差分方程正周期解的存在性[J]. *山西大同大学学报*, 2009, 25(2): 6-7.
- [9] 马如云. 非线性常微分方程非局部问题[M]. 北京: 科学出版社, 2004.
- [10] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2001.

## Existence of Anti-Periodic Solutions of First Neutral Delay Difference Dquations

ZHOU Yong-qiang, WANG Jia-zheng, DING Yi-ming

(Department of Mathematics, Hefei Normal University, Hefei 230601, China)

**Abstract:** Taking the Leray-schauder nonlinear alternative as a tool, the existence of anti-periodic solutions of first neutral delay difference equations with parameter is discussed. The existence of anti-periodic solutions is obtained when the parameter belongs to appropriate intervals. Therefore, the sufficient conditions for existence of anti-periodic solutions are obtained. The example shows the feasibility of the main results.

**Key words:** delay difference equations; anti-periodic solutions; Leray-schauder nonlinear alternative