

严格对角占优 M - 矩阵的逆矩阵的无穷大范数 上界改进的估计式

李艳艳, 蒋建新

(文山学院数理系, 云南 文山 663000)

摘要: 设 A 为严格对角占优的 M - 矩阵, 首先仅利用矩阵 A 的元素给出 A^{-1} 的元素新的上界估计式, 其次利用这些估计式给出了 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 新的上界估计式, 并由此给出了 A 的最小特征值 $q(A)$ 下界的估计式。这些新的估计式改进了已有的结果。

关键词: 对角占优矩阵; M - 矩阵; 矩阵的无穷大范数; 上界; 最小特征值

中图分类号: O151.21

文献标识码: A

1 预备知识

M - 矩阵是一个有着广泛应用背景的重要矩阵类, 生物学、物理学、数学和社会科学中的许多问题都和 M - 矩阵有着密切的联系, M - 矩阵理论因其为这些问题的研究和解决提供了数学基础和工具而被许多学者关注和研究。在这些研究中严格对角占优 M - 矩阵 A 的逆矩阵的无穷大范数 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的上界估计是其热点之一, 已获得了一系列估计式。本文继续这个问题的研究, 给出了 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的上界新的估计式, 这些估计式改进了文献[1]中的相应结果。

为叙述方便, 用 $C^{n \times n}$ ($R^{n \times n}$) 表示 $n \times n$ 复(实) 矩阵集。

$$N = \{1, 2, \dots, n\}, m \leq i \leq n, m \leq j \leq n, m \leq k \leq n$$

$$A = (a_{ij}) \in R^{n \times n} \text{ 且 } a_{ii} \neq 0, d_i = \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

$$J(A) = \{i \in N; d_i < 1\}, u_i = \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j=i+1}^n |a_{ij}|$$

$$l_k = \max_{k \leq i \leq n} \left\{ \frac{\sum |a_{ij}|}{|a_{ii}|} \right\}, l_n = u_n = 0$$

$$d_i^{(m)} = \frac{1}{a_{ii}} \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, d_i^{(1)} = d_i$$

$$d_{ji}^{(m)} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| d_k^{(m)}}{|a_{jj}| d_j^{(m)}} j \neq i$$

$$p_{ji}^{(m)} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| d_k^{(m)} d_{ki}^{(m)}}{|a_{jj}|} j \neq i$$

$$p_i^{(m)} = \max_{j \neq i} \{p_{ji}^{(m)}\}, p^{(m)} = \max_{m \leq i \leq n} \{p_i^{(m)}\}$$

$$s_{ji}^{(m)} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| d_k^{(m)}}{|a_{jj}|} j \neq i$$

$$s_i^{(m)} = \max_{j \neq i} \{s_{ji}^{(m)}\}$$

$$d_{ji}^{(m)} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| s_k^{(m)}}{|a_{jj}|}$$

$$n_{ji}^{(m)} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| s_k^{(m)} d_{ki}^{(m)}}{|a_{jj}|}$$

$$n_i^{(m)} = \max_{j \neq i} \{n_{ji}^{(m)}\}, n^{(m)} = \max_{m \leq i \leq n} \{n_i^{(m)}\}$$

设 $A = (a_{ij}) \in Z^{n \times n}, A^{(n_1, n)}$ 表示删去 A 的前 n_1 行与前 n_1 列所得 A 的主子矩阵, 如 $A^{(1, n)}$ 表示删去 A 的第一行和第一列所得 A 的主子矩阵。

定义 1^[2] 记 $Z^{n \times n} = \{A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}; a_{ij} \leq 0, i \neq j\}$

收稿日期:2012-05-30

基金项目:文山学院科研基金项目(WSYQ01)

作者简介:李艳艳(1982-),女,甘肃庆阳人,助教,硕士,主要从事矩阵理论及其应用方面的研究,(E-mail)liyanyan409@126.com

$j; i, j = 1, \dots, n$ 称 $Z^{n \times n}$ 中的矩阵 A 为 Z -矩阵(简记为 $A \in Z^{n \times n}$)。

定义 2^[2] 设 $A = (a_{ij}) \in Z^{n \times n}$, 如果 A 可表示为 $A = \alpha I - P$, 其中 $P \geq 0$ (即 $P = (p_{ij}), p_{ij} \geq 0, \forall i, j \in N, \alpha \geq \rho(P)$), 则称 A 为 M -矩阵($\rho(P)$ 是非负矩阵 P 的谱半径)。特别, 当 $\alpha > \rho(P)$ 时, 称 A 为非奇异 M -矩阵; 当 $\alpha = \rho(P)$ 时, 称 A 为奇异 M -矩阵。用 M_n 表示非奇异 M -矩阵的集合, $q(A)$ 表示非奇异 M -矩阵 A 的最小特征值。

定义 3^[3] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 且满足下列条件:

- (1) $|a_{ii}| \geq \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}| (i \in N)$; (2) $J(A) \neq \emptyset$; (3) 对 $\forall i \in N, \forall i \notin J(A)$, 存在非零元素序列 $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$, 其中 $i \neq i_1, i_1 \neq i_2, \dots, i_r \neq k, k \in J(A)$, 则称 A 为弱链对角占优矩阵。

定义 4^[3] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$, 若 $J(A) = N$, 则称 A 为严格对角占优矩阵。

注 1: 由定义 3 和定义 4 知, 若 A 为严格对角占优矩阵, 则 A 为弱链对角占优矩阵。

引理 1^[4] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是弱链对角占优 M -矩阵。则 $B = A^{(2, n)} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$ 也是弱链对角占优 M -矩阵, 且 $B^{-1} = (\beta_{ij})$ 存在, $\beta_{ij} \geq 0, (i, j = 2, 3, \dots, n)$ 。

引理 2^[5] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是弱链对角占优 M -矩阵, $B = A^{(2, n)} \in R^{(n-1) \times (n-1)}, A^{-1} = (\alpha_{ij}), B^{-1} = (\beta_{ij})$ 。则

$$\alpha_{11} = \frac{1}{\Delta} \tag{1}$$

$$\alpha_{i1} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=2}^n \beta_{ik} (-a_{k1}) \tag{2}$$

$$\alpha_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=2}^n \beta_{kj} (-a_{1k}) \tag{3}$$

$$\alpha_{ij} = \beta_{ij} + \alpha_{1j} \sum_{k=2}^n \beta_{ik} (-a_{k1}) \tag{4}$$

其中,

$$\Delta = a_{11} - \sum_{k=2}^n a_{1k} \left(\sum_{i=2}^n \beta_{ki} a_{i1} \right) > 0 \tag{5}$$

若 $J(A) = N$, 则 $\Delta \geq a_{11} (1 - d_1 l_1) \geq a_{11} (1 - d_1)$ 。

引理 3^[4] 设 $A = (a_{ij})$ 是严格对角占优的 M -矩阵, 则 $\Delta \geq a_{11} (1 - d_1 l_1) > a_{11} (1 - d_1) > 0$ 。

引理 4^[5] 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是弱链对角占优 M -矩阵, $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, 令 $q = q(A)$, 则 $q \leq \min_{i \in N} \{a_{ii}\}$; $q \leq \max_{i \in N} \left\{ \sum_{j \in N} a_{ij} \right\}$; $q \geq \min_{i \in N} \left\{ \sum_{j \in N} a_{ij} \right\}$;

$$\frac{1}{M} \leq q \leq \frac{1}{m} \tag{6}$$

其中, $M = \max_{i \in N} \left\{ \sum_{j \in N} \alpha_{ij} \right\} = \|A^{-1}\|_{\infty}$; $m = \min_{i \in N} \left\{ \sum_{j \in N} \alpha_{ij} \right\}$ 。

2 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的上界和 $q(A)$ 的下界的估计式

由参考文献[6]中定理 1 的证明可得:

定理 1 若 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优的 M -矩阵, 则 $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ 满足

$$\alpha_{ji} \leq \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| d_k^{(1)} d_{ii}^{(i)}}{a_{jj}} \alpha_{ii} \leq p^{(1)} \alpha_{ii} \leq \alpha_{ii}, j \neq i \tag{7}$$

或

$$\alpha_{ji} \leq \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j, i} |a_{jk}| s_k^{(1)} d_{ki}^{(i)}}{a_{jj}} \alpha_{ii} \leq n^{(1)} \alpha_{ii} \leq \alpha_{ii}, j \neq i \tag{8}$$

定理 2 若 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优的 M -矩阵, 则 $A^{-1} = (\alpha_{ij})$ 满足

$$\frac{1}{\alpha_{ii}} \leq \alpha_{ii} \leq \frac{1}{a_{ii} - \sum_{j \neq i} a_{ij} p_{ji}}, i \in N \tag{9}$$

或

$$\frac{1}{\alpha_{ii}} \leq \alpha_{ii} \leq \frac{1}{a_{ii} - \sum_{j \neq i} a_{ij} n_{ji}}, i \in N \tag{10}$$

下面给出 $\|A^{-1}\|_{\infty}$ 的上界和 $q(A)$ 下界的一些新的估计式。

定理 3 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是严格对角占优的 M -矩阵, $B = A^{(2, n)} \in R^{(n-1) \times (n-1)}, A^{-1} = (\alpha_{ij}), B^{-1} = (\beta_{ij})$, 则

$$\|A^{-1}\|_{\infty} < \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{l_1}{a_{11} (1 - d_1 l_1)} + \frac{1}{1 - d_1 l_1} M_B \tag{11}$$

证明 令 $h_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij}, M_A = \|A^{-1}\|_{\infty}, M_B = B^{-1}$, 则 $M_A = \max_{i \in N} \{h_i\}, M_B = \max_{2 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=2}^n \beta_{ij} \right\}$ 。由引理 2 知, $h_1 = \alpha_{11} + \sum_{j=2}^n \alpha_{1j} \leq \frac{1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{1}{\Delta} \sum_{k=2}^n (-a_{1k}) \sum_{j=2}^n \beta_{kj} \leq \frac{1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{1}{\Delta} \sum_{k=2}^n (-a_{1k}) M_B$

$$\leq \frac{1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{d_1}{1 - d_1 l_1} M_B$$

$$\leq \frac{1 + a_{11} d_1 M_B}{a_{11} (1 - d_1 l_1)} \quad (12)$$

当 $2 \leq i \leq n$ 时,应用(1)式,(2)式,(7)式得:

$$\sum_{k=2}^n \beta_{ik} (-a_{ki}) = \Delta \alpha_{i1} \leq \Delta p^{(1)} \alpha_{11} = \frac{1}{\alpha_{11}} p^{(1)} \alpha_{11}, =$$

$$p^{(1)} < 1 \quad (13)$$

由(4)式知,当 $2 \leq j \leq n$ 时

$$\alpha_{ij} \leq \beta_{ij} + \alpha_{1j} p^{(1)} < \beta_{ij} + \alpha_{1j} \quad (14)$$

故当 $2 \leq i \leq n$ 时, $h_i = \alpha_{i1} + \sum_{j=2}^n \alpha_{ij} \leq \alpha_{i1} d_i +$

$$\sum_{j=2}^n (\beta_{ij} + \alpha_{1j} d_i)$$

$$\leq \alpha_{i1} + \sum_{j=2}^n (\beta_{ij} + \alpha_{1j} d_i) \leq (1 - l_1) \alpha_{i1} + l_1 h_1 + M_B$$

$$\leq \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + l_1 h_1 + M_B \quad (15)$$

如果 $h_1 \leq \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + l_1 h_1 + M_B$, 由(12)

式、(15)式得

$$M_A \leq \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + l_1 h_1 + M_B$$

$$\leq \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + l_1 \frac{1 + a_{11} d_1 M_B}{a_{11} (1 - d_1 l_1)} + M_B$$

$$= \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{l_1}{a_{11} (1 - d_1 l_1)} + \frac{1}{1 - d_1 l_1} M_B \quad (16)$$

如果 $h_1 > \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + l_1 h_1 + M_B$, 应用(12)

式得,

$$M_A = h_1 \leq \frac{1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{d_1}{1 - d_1 l_1} M_B$$

$$= \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{l}{a_{11} - \sum_{k=2}^n |a_{1k}| p_{k1}} +$$

$$\frac{d_1}{1 - d_1 l_1} M_B$$

$$\leq \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{j \neq 1}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{l_1}{a_{11} (1 - d_1 l_1)} + \frac{1}{1 - d_1 l_1} M_B \quad (17)$$

综合(16)式与(17)式得,

$$\|A^{-1}\|_{\infty} < \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{j \neq 1}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{l_1}{a_{11} (1 - d_1 l_1)} +$$

$$\frac{1}{1 - d_1 l_1} M_B \quad (18)$$

则定理得证。

对(18)式应用迭代法即得如下定理。

定理 4 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是严格对角占优的 M - 矩阵,则

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k \neq 1}^n |a_{1k}| p_{k1}} + \frac{l_1}{a_{11} (1 - d_1 l_1)} +$$

$$\sum_{i=2}^n \left[\left(\frac{1 - u_i}{a_{ii} - \sum_{\substack{k \neq i \\ i \leq k \leq n}} |a_{ik}| p_{ki}} + \frac{u_i}{a_{ii} (1 - d_i l_i)} \right) \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{1 - u_j l_j} \right] \quad (19)$$

应用(8)式和(10)式,类似定理 1 的证明可得如下定理,其证明不再赘述。

定理 5 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是严格对角占优的 M - 矩阵, $B = A^{(2,n)} \in R^{(n-1) \times (n-1)}$, $A^{-1} = (\alpha_{ij})$, $B^{-1} = (\beta_{ij})$, 则

$$\|A^{-1}\|_{\infty} < \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k \neq 1}^n |a_{1k}| n_{k1}} + \frac{l_1}{a_{11} (1 - d_1 l_1)} +$$

$$\frac{1}{1 - d_1 l_1} M_B$$

定理 6 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是严格对角占优的 M - 矩阵,则

$$\|A^{-1}\|_{\infty} \leq \frac{1 - l_1}{a_{11} - \sum_{k \neq 1}^n |a_{1k}| n_{k1}} + \frac{l_1}{a_{11} (1 - d_1 l_1)} +$$

$$\sum_{i=2}^n \left[\left(\frac{1 - u_i}{a_{ii} - \sum_{\substack{k \neq i \\ i \leq k \leq n}} |a_{ik}| n_{ki}} + \frac{u_i}{a_{ii} (1 - d_i l_i)} \right) \prod_{j=1}^{i-1} \frac{1}{1 - u_j l_j} \right] \quad (20)$$

3 数值算例

例 设 $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -1 \\ -4 & 9 & -4 \\ -3 & -4 & 11 \end{pmatrix}$ 。用 matlab7.1 计算得

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0.1631 & 0.0511 & 0.0334 \\ 0.1100 & 0.1670 & 0.0707 \\ 0.0845 & 0.0741 & 0.1257 \end{pmatrix}, \|A^{-1}\|_{\infty} = 0.3477,$$

应用文献[1]中定理2,定理4,定理6分别得 $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 0.407$, $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 0.35$, $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 0.353$;应用本文定理4的估计式(19)得 $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 0.3483$;应用本文定理6的估计式(20)得; $\|A^{-1}\|_{\infty} \leq 0.3481$ 。表明在某些条件下定理4与定理6的估计比参考文献[1]中估计更为精确。

参考文献:

- [1] 李艳艳,李耀堂.严格对角占优M-矩阵的逆矩阵的无穷大范数上界的估计[J].云南民族大学学报:自然科学版,2012(1):52-56.
- [2] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000.
- [3] 黄廷祝,杨传胜.特殊矩阵分析及应用[M].北京:科学出版社,2007.
- [4] Shivakumar P N, Chew K H. A sufficient condition for nonvanishing of determinants[J]. Proc Amer. Math. Soc., 1974,43:63-66.
- [5] Cheng Guoliang, Huang Tingzhu. An upper bound for $\|A^{-1}\|_{\infty}$ of strictly diagonally dominant M-matrices[J]. Linear Algebra Appl.,2007,426:667-673.
- [6] LI Yaotang, LI Yanyan. Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl.,2010,432:536-545.

Estimation on Upper Bounds for $\|A^{-1}\|_{\infty}$ of Strictly Diagonally Dominant M -matrices

LI Yan-yan, JINAG Jian-xin

(Department of Mathematics and Physics, Wenshan University, Yunnan 663000, China)

Abstract: Let A be a real strictly diagonally dominant M -matrix. Firstly, some new upper bounds for the entries of A^{-1} are given, these bounds only depend on the entries of matrix A . Secondly, some new upper bounds of $\|A^{-1}\|_{\infty}$ are given. Finally, the lower bound of the smallest eigenvalue $q(A)$ of A is presented. These bounds improve the existing results.

Key words: diagonal dominance matrix; M -matrix; infinity norms of matrices; upper bound; minimum eigenvalue