

# 随机微分方程稳定性的两种不动点方法的比较

王春生

(广州大学华软软件学院管理系,广州 510990)

**摘要:**考虑了一类线性随机积分微分方程,通过应用 Schauder 不动点方法得出使得其零解指数均方稳定性的条件,并对所得的零解指数均方稳定性定理给出了严格的证明。最后通过实例将所得结论与采用 Banach 不动点方法得出的结论作出了比较分析,得出在采用不动点方法研究随机微分方程零解的稳定性时,Schauder 不动点方法和 Banach 不动点方法各有所长,这使得不动点方法在随机微分方程零解稳定性方面的研究更加简单可行。

**关键词:**Banach 不动点;Schauder 不动点;全连续;指数均方稳定性;随机积分微分方程

**中图分类号:**O211.63

**文献标识码:**A

很多专家学者已利用 Lyapunov 直接法、不动点方法以及其它方法研究了确定性和随机微分方程以及积分微分方程解的稳定性、有界性和周期解的存在性,并对三种方法进行了分析和比较<sup>[1-12]</sup>。作为不动点方法的推广,文献[13]研究了一类随机积分微分方程的均方指数稳定性和 L2 稳定性,改进了文献[7]的部分结论。由于不动点方法在研究随机微分方程的稳定性方面有诸多优越性,所以该方面的研究已被很多专家学者所关注。不过,目前大多数文献都是采用 Banach 不动点方法进行研究,采用 Schauder 不动点方法研究的较少。作为该研究的深入推广,本文将采用 Schauder 不动点方法研究一类随机积分微分方程的指数均方稳定性。文章最后通过实例,对两种不动点方法所得的结论进行了分析和比较。

## 1 论证分析

### 1.1 主要结果

**定义 1** 方程

$$dx(t) = a(t)x(t)dt + \int_0^t G(t-s)x(s)dsd\omega(t), t \geq 0 \quad (1)$$

被称为是指数均方稳定的,如果对任意的初值  $\xi$ ,存在  $C$

$> 0, \rho > 0$ , 使得其相应的解  $x(t)$  满足  $E|x(t)|^2 \leq CE|\xi|^2e^{-\rho t}, t \geq 0$ 。

**Banach 不动点定理**<sup>[14]</sup>: 设  $(X, d)$  是完备的距离空间,  $T: X \rightarrow X$ , 对任意的  $x, y \in X$ , 有  $d(Tx, Ty) \leq \theta d(x, y)$ , 其中  $0 < \theta < 1$ , 则存在唯一的  $\bar{x} \in X$ , 使得  $T\bar{x} = \bar{x}$ , 即  $T$  在  $X$  上有唯一的不动点。

**Schauder 不动点定理**: 若  $K$  是 Banach 空间  $B$  的一凸闭子集, 而  $\tau: K \rightarrow K$  是全连续的, 则存在  $x^* \in K$  使得  $\tau x^* = x^*$ 。

**定理 1**<sup>[2]</sup> 每一个一致均方有界和均方等度连续的函数集  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ , 对任何  $t \in T$  至少存在一  $T$  上均方收敛的子序列。

假设  $(\Omega, F, \{F_{t \geq 0}\}, P)$  是一个完备的概率空间,  $\{F_t\}$  右连续包含所有的零测集,  $\{\omega(t), t \geq 0\}$  是一个定义在  $(\Omega, F, \{F_{t \geq 0}\}, P)$  上的一维布朗运动, 函数  $a(t) \in C(R^+, R)$ 。

考虑方程(1),  $G: R^+ \rightarrow R$ , 初始条件  $x_0 = \xi$  可测, 且  $E|\xi|^2 < \infty$ 。

在文献[13]中采用 Banach 不动点方法研究过方程(1)的指数均方稳定性, 得出如下结论:

**定理 2** 假设存在正数  $\beta, M_0, \gamma, \kappa > M > 0$  和连续函数  $h(t): [0, \infty) \rightarrow R^+$ , 当  $t \geq 0$  时, 存在  $\eta \in (0, 1)$ , 使

得

$$(1) e^{-\int_0^t h(u) du} |a(s) + h(s)| \leq M e^{-\kappa(t-s)}, 0 \leq s < t$$

$$(2) \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\gamma(r-t)} e^{-2\int_0^r h(u) du} dr \leq M_0$$

$$(3) \int_0^t e^{-\int_0^s h(u) du} |a(s) + h(s)| ds + \frac{\beta}{\gamma} \left[ \int_0^t e^{-2\int_0^s h(u) du} ds \right]^{\frac{1}{2}} \leq \eta < 1$$

$$(4) |G(t)| \leq \beta e^{-\gamma t}$$

则方程(1)的零解  $x(t)$  均方指数稳定。

用 Schauder 不动点方法研究方程(1)的零解的指数均方稳定性,得到如下结论:

**定理3** 假设存在正数  $\kappa, \beta, M, M_0, \gamma$  和连续有界的函数  $h(t): [0, \infty) \rightarrow R^+$ , 当  $t \geq 0$  时,

$$(1) e^{-\int_0^t h(u) du} |a(s) + h(s)| \leq M e^{-\kappa(t-s)}, 0 \leq s \leq t$$

$$(2) \sup_{t \geq 0} \int_0^t e^{-\gamma(r-t)} e^{-2\int_0^r h(u) du} dr \leq M_0$$

$$(3) |G(t)| \leq \beta e^{-\gamma t}$$

则方程(1)的零解  $x(t)$  指数均方稳定。

1.2 定理3的证明

**证明** 定义  $S$  为所有  $F$ -适应过程  $\varphi(t, \omega): [0, \infty) \times \Omega \rightarrow R$  所构成的 Banach 空间, 且对固定的  $\omega \in \Omega$ ,  $\phi(t, \omega)$  关于  $t$  几乎处处连续, 其初值  $\phi(0) = \xi$ 。当  $t \rightarrow \infty$  时, 存在一常数  $\alpha$  满足  $0 < \alpha < \min\{\kappa, \gamma\}$ , 使得当  $t \rightarrow \infty$  时,  $e^{\alpha t} E|\phi(t, \omega)|^2 \rightarrow 0$ 。定义算子  $\Psi: S \rightarrow S$  且  $(\Psi\varphi)(0) = \xi$ , 当  $t \geq 0$  时,

$$(\Psi\varphi)(t) = \xi e^{-\int_0^t h(u) du} + \int_0^t [a(s) + h(s)] \phi(s) e^{-\int_0^s h(u) du} ds + \int_0^t \left( \int_0^s G(s-r) \phi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) := \sum_{i=1}^3 I_i \quad (2)$$

(1)  $S$  是凸闭的。对任意的  $x_1, x_2, \dots, x_n \in S, \lambda_i \in R, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , 对任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $T_i > 0$ , 当  $t > T_i$  时,  $e^{\alpha t} E|x_i(t)|^2 < \varepsilon$ 。令  $T = \max\{T_i, i = 1, 2, \dots, n\}$ , 则当  $t > T$  时,

$$e^{\alpha t} E \left| \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(t) \right|^2 < \varepsilon \sum_{i=1}^n \lambda_i = \varepsilon$$

即  $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i(t) \in S$ 。

(2)  $\Psi$  是  $S$  上的全连续算子。首先,  $\Psi S$  等度均方连续。如果  $\varphi \in S, 0 \leq t_1 < t_2$ , 则

$$E|(\Psi\varphi)(t_2) - (\Psi\varphi)(t_1)|^2 = E|(\xi e^{-\int_0^{t_2} h(u) du} - \xi e^{-\int_0^{t_1} h(u) du}) + \left( \int_0^{t_2} [a(s) + h(s)] \varphi(s) e^{-\int_0^s h(u) du} ds - \int_0^{t_1} [a(s) + h(s)] \varphi(s) e^{-\int_0^s h(u) du} ds \right) + \left( \int_0^{t_2} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) - \int_0^{t_1} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) \right)|^2 \leq$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{t_1} [a(s) + h(s)] \varphi(s) e^{-\int_0^s h(u) du} ds + \\ & \left( \int_0^{t_2} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) - \int_0^{t_1} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) \right)^2 \leq \\ & 3E|\xi|^2 e^{-2\int_0^{t_1} h(u) du} |e^{-\int_{t_1}^{t_2} h(u) du} - 1|^2 + \\ & 3E \left( \sup_{0 \leq t \leq t_2} |\varphi(t)|^2 \right) \left| \int_0^{t_2} [a(s) + h(s)] e^{-\int_0^s h(u) du} ds - \int_0^{t_1} [a(s) + h(s)] e^{-\int_0^s h(u) du} ds \right|^2 + \\ & 3E \left[ \int_0^{t_2} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) - \int_0^{t_1} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) \right]^2 \end{aligned} \quad (3)$$

因为  $h(s)$  有界, 所以存在  $\delta > 0$  使得,

$$\begin{aligned} & 3E|\xi|^2 e^{-2\int_0^{t_1} h(u) du} |e^{-\int_{t_1}^{t_2} h(u) du} - 1|^2 \leq \\ & 3E|\xi|^2 e^{-2\int_0^{t_1} h(u) du} |e^{-\int_{t_1}^{t_2} h(u) du} - 1| \leq \\ & 3E|\xi|^2 e^{-2\int_0^{t_1} h(u) du} e^0 \int_{t_1}^{t_2} h(u) du \leq \\ & 3E|\xi|^2 e^{-2\int_0^{t_1} h(u) du} \delta(t_2 - t_1) \leq \\ & 3E|\xi|^2 \delta(t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (4)$$

同时, 由条件(1)知,

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^{t_2} [a(s) + h(s)] e^{-\int_0^s h(u) du} ds - \int_0^{t_1} [a(s) + h(s)] e^{-\int_0^s h(u) du} ds \right|^2 = \\ & \left| \int_0^{t_1} [a(s) + h(s)] e^{-\int_0^s h(u) du} (e^{-\int_s^{t_2} h(u) du} - 1) ds + \int_{t_1}^{t_2} [a(s) + h(s)] e^{-\int_0^s h(u) du} ds \right|^2 \leq \\ & \left| \int_0^{t_1} M e^{-\kappa(t_1-s)} (e^{-\int_s^{t_2} h(u) du} - 1) ds + \int_{t_1}^{t_2} M e^{-\kappa(t_2-s)} ds \right|^2 \leq \\ & \left| \frac{M}{\kappa} (1 - e^{-\int_{t_1}^{t_2} h(u) du}) + \frac{M}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(t_2-t_1)}) \right|^2 \leq \\ & \frac{2M^2}{\kappa^2} \left| \int_{t_1}^{t_2} h(u) du \right| + \frac{2M^2}{\kappa} (t_2 - t_1) \leq \\ & \left( \frac{2\delta M^2}{\kappa^2} + \frac{2M^2}{\kappa} \right) (t_2 - t_1) \end{aligned} \quad (5)$$

再者, 由条件(2)、(3)知,

$$E \left[ \int_0^{t_2} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) - \int_0^{t_1} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) \right]^2 \leq$$

$$\begin{aligned}
 & 2 \left\{ \int_0^{t_1} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right)^2 \times \right. \\
 & e^{-2 \int_0^s h(u) du} \left( e^{-\int_0^s h(u) du} - 1 \right)^2 ds + \\
 & \left. \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right)^2 e^{-2 \int_0^s h(u) du} ds \right\} \leq \\
 & 2 \left( \sup_{0 \leq t \leq t_2} E |\varphi(t)|^2 \right) \left\{ \int_0^{t_1} \left( \int_0^s G(s-r) dr \right)^2 \times \right. \\
 & e^{-2 \int_0^s h(u) du} \left( e^{-\int_0^s h(u) du} - 1 \right)^2 ds + \\
 & \left. \int_{t_1}^{t_2} \left( \int_0^s G(s-r) dr \right)^2 e^{-2 \int_0^s h(u) du} ds \right\} \\
 & \frac{2\beta^2}{\gamma^2} \left( \sup_{0 \leq t \leq t_2} E |\varphi(t)|^2 \right) \times \\
 & \{ M_0 (e^{-\int_0^{t_1} h(u) du} - 1)^2 + (t_2 - t_1) \} \leq \\
 & \frac{2\beta^2}{\gamma^2} \left( \sup_{0 \leq t \leq t_2} E |\varphi(t)|^2 \right) \times \\
 & \{ M_0 \delta (t_2 - t_1) + (t_2 - t_1) \} = \frac{2\beta^2 (M_0 \delta + 1)}{\gamma^2} \\
 & \times \left( \sup_{0 \leq t \leq t_2} E |\varphi(t)|^2 \right) \times (t_2 - t_1) \quad (6)
 \end{aligned}$$

所以,对任意  $0 \leq t_1 < t_2$  和  $\varphi \in S$ , 有

$$\begin{aligned}
 & E |(\Psi\varphi)(t_2) - (\Psi\varphi)(t_1)|^2 \leq \\
 & \{ 3E |\xi|^2 \delta + \\
 & 3 \left( \frac{2\delta M^2}{\kappa^2} + \frac{2M^2}{\kappa} + \frac{2\delta\beta^2 M_0}{\gamma^2} + \frac{2\beta^2}{\gamma^2} \right) \times \\
 & \sup_{t \geq 0} E |\varphi(t)|^2 \} (t_2 - t_1) \quad (7)
 \end{aligned}$$

即,  $\Psi S$  等度均方连续。同时,  $\psi S$  一致均方有界。

对任意  $t \geq 0, \varphi(t) \in S$ , 有

$$\begin{aligned}
 & E |(\Psi\varphi)(t)|^2 = E \left| \xi e^{-\int_0^t h(u) du} + \right. \\
 & \left. \int_0^t [a(s) + h(s)] \varphi(s) e^{-\int_0^s h(u) du} ds + \right. \\
 & \left. \int_0^t \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) \right|^2 \leq \\
 & 3E |\xi|^2 e^{-\int_0^t h(u) du} + \\
 & 3E \left| \int_0^t [a(s) + h(s)] \varphi(s) e^{-\int_0^s h(u) du} ds \right|^2 + \\
 & 3E \left| \int_0^t \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} d\omega(s) \right|^2 \leq \\
 & 3E |\xi|^2 e^{-\int_0^t h(u) du} + \\
 & 3E \left| \int_0^t [a(s) + h(s)] \varphi(s) e^{-\int_0^s h(u) du} ds \right|^2 + \\
 & 3E \left| \int_0^t \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right) e^{-\int_0^s h(u) du} ds \right|^2 \quad (8)
 \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 & 3E |\xi|^2 e^{-\int_0^t h(u) du} < \infty \\
 & 3E \left| \int_0^t [a(s) + h(s)] \varphi(s) e^{-\int_0^s h(u) du} ds \right|^2 \leq
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & 3 \sup_{t \geq 0} E |\varphi(t)|^2 \int_0^t M e^{-\kappa(t-s)} ds \leq \\
 & \frac{3M}{\kappa} \sup_{t \geq 0} E |\varphi(t)|^2 < \infty \quad (9)
 \end{aligned}$$

再者,

$$\begin{aligned}
 & 3E \left| \int_0^t \left( \int_0^s G(s-r) \varphi(r) dr \right)^2 e^{-2 \int_0^s h(u) du} ds \right| \leq \\
 & \frac{3\beta^2}{\gamma^2} \sup_{t \geq 0} E |\varphi(t)|^2 \int_0^t e^{-2 \int_0^s h(u) du} ds \leq \\
 & \frac{3\beta^2 M_0}{\gamma^2} \sup_{t \geq 0} E |\varphi(t)|^2 < \infty \quad (10)
 \end{aligned}$$

故,  $\Psi S$  一致均方有界。由定理 A 知,  $\Psi S$  列紧。又  $S$  是一有界集, 所以  $\Psi$  是  $S$  上的紧算子。同时, 由于  $\Psi$  在  $[0, \infty)$  上均方连续, 所以,  $\Psi$  是  $S$  上的全连续算子。

(2) 由文献[13]可知  $\Psi(s) \subset S$ 。

综上所述, 由 Schauder 不动点定理,  $\Psi$  在  $S$  上有不动点  $x(t)$ , 即为方程(1)的解, 且满足初始条件  $x(0) = \xi$ , 且当  $t \rightarrow \infty$  时, 存在一常数  $\alpha$  满足  $0 < \alpha < \min\{\kappa, \gamma\}$ , 使得  $e^{\alpha t} E |x(t)|^2 \rightarrow 0$ , 即方程(1)的零解指数均方稳定。

特别地, 比较定理 2 与定理 3 的结论知, 这两个定理各有所长, 这使得随机微分方程零解的稳定性研究更加可行。当  $a(t)$  为一正常数时, 用 Banach 不动点方法判断比较困难, 但采用 Schauder 不动点方法研究就显得比较方便。

### 1.3 实例分析

例 1 考虑下面随机积分微分方程:

$$dx(t) = -x(t)dt + \left( \int_0^t \beta e^{-(t-s)} x(s) ds \right) d\omega(t)$$

其中  $\beta$  为大于 0 的常数, 令  $h(t) = 1$ , 则由定理 3 知, 该方程指数均方稳定, 且由定理 2 知, 该方程指数均方稳定的充分条件均为:  $\beta^2 < 2$ 。所以该方程的研究中, Schauder 不动点方法所得结论要比 Banach 方法优越。

例 2 考虑随机积分微分方程:

$$dx(t) = x(t)dt + \left( \int_0^t \beta e^{-(t-s)} x(s) ds \right) d\omega(t)$$

其中  $\beta$  为大于 0 的常数。如果利用定理 2 的结论, 想找到满足该定理条件且使计算简便易行的  $h(t)$  的函数相对比较困难。但如果令  $h(t) = 1$  (必要时刻选的更小), 则由定理 3 知, 该方程指数均方稳定。

例 3 考虑随机积分微分方程:

$$dx(t) = -\frac{|t-1|}{2} x(t)dt + \left( \int_0^t \beta e^{-(t-s)} x(s) ds \right) d\omega(t)$$

其中  $\beta$  为大于 0 的常数。令  $h(t) = |t-1|/2$ , 由定理 2 知, 该方程指数均方稳定的充分条件为:  $\sup_{t \geq 0} \beta^2 \int_0^t e^{-2 \int_0^s |u-1| du} ds < 1$ 。但想找到满足定理 3 且使计

算简便易行的  $h(t)$  比较困难。

所以,在这种情形下,Banach 不动点方法较显然比 Schauder 优越。

综合上述分析,可以得出结论:两种方法在研究随机微分方程的稳定性方法相互互补,各有其优越性。

## 2 结束语

本文利用 Schauder 不动点方法研究了随机积分微分方程的稳定性,得出了定理 3。在采用不动点方法研究随机微分方程零解的稳定性时,Schauder 不动点方法和 Banach 不动点方法各有所长,这使得不动点方法在随机微分方程零解稳定性方面的研究更加简单易行。

### 参考文献:

- [1] Luo Jiaowan. Fixed points and stability of neutral stochastic delay differential equations[J]. J. Math. Anal. Appl, 2007(334):431-440.
- [2] Joseph P Noonan, Henry M Polchlopek. An Arzela-Ascoli type theorem for random functions[J]. Internat. J. Math. Math. Sci, 2007, 14(4):789-796.
- [3] Wu R Q, Mao X. Existence and uniqueness of solutions of stochastic differential equations[J]. Stochastics, 1983 (11):19-32.
- [4] Burton T A. Asymptotic behavior of solutions of functional differential equations by fixed point theorems[J]. Fixed Point Theory, 2003(4):121-133.
- [5] Burton T A. Stability by fixed point theory or Lyapunov theory: A comparison[J]. Fixed Point Theory, 2003(4):15-32.
- [6] Mao X. Exponential stability for stochastic differential delay equations in Hilbert space[J]. Quarterly J. Math. Oxford(2), 1991(42):391-400.
- [7] Mao Xuerong. Stability of stochastic integer-differential equations[J]. Stochastic analysis and applications, 2000, 18(6):1005-1017.
- [8] Wei W, Hou S H, Teo K L. On a class of strongly nonlinear impulsive differential equation with time delay[J]. Nonlinear dynamics and systems theory, 2006, 6(3):281-293.
- [9] 钟太勇, 邓乐斌, 余晓娟. 不动点定理在微分方程中的进一步研究[J]. 四川理工学院学报:自然科学版, 2010, 23(2):147-148.
- [10] D.R. 斯玛特. 不动点定理[M]. 重庆:重庆出版社, 1982.
- [11] Bernt Ksendal. Stochastic Differential Equations[M]. bthed. New York: Springer, 2005.
- [12] 胡宜达. 随机微分方程稳定性理论[M]. 南京:南京大学出版社, 1986.
- [13] 王春生. 不动点与随机积分微分方程的稳定性[J]. 广州大学学报:自然科学版, 2009, 8(2):49-52.
- [14] 武保亭, 李庆士, 杨跃武. 随机过程与随机微分方程[M]. 西安:电子科技大学出版社, 1994.

## Comparison of Stability of Stochastic Differential Equations by Two Fixed Points Methods

WANG Chun-sheng

(South China Institute of Software Engineering, Guangzhou University, Guangzhou 510990, China)

**Abstract:** The exponentially stability in mean square of a kind of linear stochastic integro-differential equation by means of Schauder fixed point method is considered. The exponentially stability in mean square theorem with necessary conditions is proved. Finally, some examples are given to the conclusions and the one by Banach fixed point method. A comparative analysis of the main points of articles are drawn: when the stability of stochastic differential equations is studied by the use of fixed point method, the Schauder fixed point method and the Banach fixed point method have their own strengths, which make the fixed point method for stochastic differential equations in the stability study more simple and workable.

**Key words:** Banach fixed point; Schauder fixed point; completely continuous; the exponentially stability in mean square; stability; stochastic integro-differential equations