

# 关于不定方程 $x^3 - 1 = Dy^2$

杜先存<sup>a</sup>, 李玉龙<sup>a</sup>, 赵金城<sup>b</sup>

(红河学院 a. 教师教育学院; b. 数学系, 云南 蒙自 661199)

**摘要:** 设  $D$  是奇素数, 运用初等数论的方法给出了在  $D = 3(8m + k)(8m + k + 1) + 1 (m, k \in \mathbb{N}, k \leq 7)$  的情形下不定方程  $x^3 - 1 = Dy^2$  无正整数解的充分条件。

**关键词:** 不定方程; 奇素数; 充分条件; 正整数解

**中图分类号:** O156.1

**文献标识码:** A

## 引言

不定方程  $x^3 - 1 = Dy^2$  ( $D$  是无平方因子的正整数) 是一类重要的不定方程, 其整数解已有不少人研究过。柯召, 孙琦<sup>[1-2]</sup> 证明了当  $D$  不含  $6k + 1$  型的素因子时, 方程无正整数解, 但当  $D$  含  $6k + 1$  型的素因子时, 方程的求解较为困难。高洁, 梁勇<sup>[3]</sup> 证明了  $p$  为  $3(4k + 3)(4k + 4) + 1 (k \in \mathbb{N}$  型的奇素数时, 方程  $x^3 - 1 = py^2$  无正整数解。韩云娜<sup>[4]</sup> 证明了  $p$  为  $3(12k + m)(12k + m + 1) + 1 (m = 6, 8, 9, 11, k \in \mathbb{N})$  型素数且  $24k + 2m + 1$  也为素数时, 方程  $x^3 - 1 = 3py^2$  无正整数解。乐茂华<sup>[5]</sup> 证明了  $p$  为  $12s^2 + 1 (s \in \mathbb{Z}^+)$  型素数时, 方程  $x^3 - 1 = 3py^2$  无正整数解。梁勇, 韩云娜<sup>[6]</sup> 证明了  $p$  是  $3(12r + 7)(12k + 8) + 1 (r \in \mathbb{Z}^+)$  型的奇素数,  $D_1$  不能被 3 或  $6k + 1$  型素数整除,  $D_1 \equiv 5, 8 \pmod{12}$ ,  $D_1 p$  是无平方因子的正整数时, 方程  $x^3 - 1 = D_1 py^2$  无正整数解。

**定理 1** 设素数  $D = 3(8m + k)(8m + k + 1) + 1$ ,  $y_0 = 16m + 2k + 1 (m, k \in \mathbb{N}, k \leq 7)$ , 若  $y_0$  有素因数  $q \equiv 5, 7 \pmod{8}$ , 则方程

$$x^3 - 1 = Dy^2 \quad (1)$$

当  $k = 0, 3, 4, 7$  时, 无正整数解; 当  $k = 2, 5$  时, 无  $2 \mid x$  的正整数解。

**定理 2** 设素数  $D = 3(8m + k)(8m + k + 1) + 1$ ,  $y_0 = 16m + 2k + 1 (m, k \in \mathbb{N}, k \leq 7)$  为素数, 则方程

$x^3 - 1 = Dy^2$ , 当  $k = 3, 7$  时, 无正整数解; 当  $k = 2$  时, 无  $2 \mid x$  的正整数解。

## 1 主要引理

**引理 1**<sup>[3]</sup> 设  $(x, y) = (2v, 2u^2 + 1)$  是不定方程  $px^2 - 3y^2 = 1$  的一组正整数解, 而方程  $px^2 - 3y^2 = 1$  的最小解为  $(2, y_0)$ , 则当形如  $8k + 5, 8k + 7$  的素数  $p \mid y_0$  时, 该方程无正整数解。

**引理 2**<sup>[7]</sup> 设  $a > 1, (a, b) \in \mathbb{N}^2, ab$  不是完全平方数, 如果  $ax^2 - by^2 = 1$  有解  $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ , 设  $x_1 \sqrt{a} + y_1 \sqrt{b}$  是方程  $ax^2 - by^2 = 1 (x, y \in \mathbb{Z})$  的基本解, 则  $ax^2 - by^2 = 1$  的任一组解可以表示为:

$$x \sqrt{a} + y \sqrt{b} = \pm (x_1 \sqrt{a} + y_1 \sqrt{b})^{2n+1}, n \in \mathbb{Z}$$

## 2 定理证明

### 2.1 定理 1 证明

由方程(1), 得  $(x - 1)(x^2 + x + 1) = Dy^2$ , 因为  $(x - 1, x^2 + x + 1) = 1$  或 3, 由文献[3]中定理 1 的证明可得, 方程(1)给出

$$x - 1 = u^2, x^2 + x + 1 = Dv^2, y = uv \quad (2)$$

或

$$x - 1 = 3u^2, x^2 + x + 1 = 3Dv^2, y = 3uv \quad (3)$$

由方程(2)的第二式知,  $v$  为奇数, 故  $v^2 \equiv$

1(mod 8)。又  $k = 0, 7$  时,  $D \equiv 1 \pmod{8}$ ;  $k = 2, 5$  时,  $D \equiv 3 \pmod{8}$ ;  $k = 3, 4$  时,  $D \equiv 5 \pmod{8}$ 。所以有:  $k = 0, 7$  时,  $Dv^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ;  $k = 2, 5$  时,  $Dv^2 \equiv 3 \pmod{8}$ ;  $k = 3, 4$  时,  $Dv^2 \equiv 5 \pmod{8}$ 。

又  $x$  为奇数时,  $x - 1 = u^2 \equiv 0, 4 \pmod{8}$  得  $x \equiv 1, 5 \pmod{8}$ , 故  $Dv^2 = x^2 + x + 1 = 3, 7 \pmod{8}$ 。所以当  $D \equiv 1, 5 \pmod{8}$  时, 方程(2)无  $2|x$  的正整数解。

又  $x$  为偶数时,  $x - 1 = u^2 \equiv 1 \pmod{8}$ , 得  $x \equiv 2 \pmod{8}$ , 故  $Dv^2 = x^2 + x + 1 = 7 \pmod{8}$ 。所以当  $D \equiv 1, 3, 5 \pmod{8}$  时, 方程(2)无  $2|x$  的正整数解。

由此, 当  $k = 0, 3, 4, 7$  时,  $D \equiv 1, 5 \pmod{8}$ , 方程(2)无正整数解; 当  $k = 2, 5$  时,  $D \equiv 3 \pmod{8}$ , 方程(2)无  $2|x$  的正整数解。

将方程(3)第一式代入第二式, 化简得

$$D(2v)^2 - 3(2u^2 + 1)^2 = 1 \tag{4}$$

由(4)式知,  $(x, y) = (2v, 2u^2 + 1)$  为不定方程

$$Dx^2 - 3y^2 = 1 \tag{5}$$

的一组整数解。将  $D = 3(8m + k)(8m + k + 1) + 1$  代入方程(5), 得  $(2, 16m + 2k + 1)$  是方程(5)的解, 则  $(2, 16m + 2k + 1)$  是方程(5)的最小正整数解。否则, 令  $(1, y)$  是方程(5)的最小正整数解, 则

$$y^2 = \frac{D-1}{3} = (8m+k)(8m+k+1)$$

左边是个完全平方数, 右边是两个相邻的正整数的乘积, 显然不成立, 所以  $(1, y)$  不是方程(5)的最小正整数解, 因此  $(2, 16m + 2k + 1)$  是方程(5)的最小正整数解。

又  $y_0$  有素因数  $q \equiv 5, 7 \pmod{8}$ , 则由引理 1, 得方程(5)无正整数解, 故方程(3)无正整数解。

综上所述, 当  $k = 0, 3, 4, 7$  时, 方程(1)无正整数解。当  $k = 2, 5$  时, 方程(1)无  $2|x$  的正整数解。

### 2.2 定理 2 证明

由定理 1 证明知, 当  $k = 3, 7$  时, 方程(2)无正整数

解; 当  $k = 2$  时, 方程(2)无  $2|x$  的正整数解。

将  $D = 3(8m + k)(8m + k + 1) + 1$  代入方程(5), 由定理 1 的证明得  $(2, 16m + 2k + 1)$  是方程(5)的最小解。由引理 2, 可知

$$2v\sqrt{D} + (2u^2 + 1)\sqrt{3} = (2\sqrt{D} + (16k + 2m + 1)\sqrt{3})^{2n+1} \quad (n \in N) \tag{6}$$

由(6)式得,  $2u^2 + 1 \equiv 0 \pmod{(16m + 2k + 1)}$ , 即  $(2u)^2 \equiv -2 \pmod{(16m + 2k + 1)}$ 。

又  $k = 2, 3, 7$  时, 模  $(16m + 2k + 1)$  的 Legendre 符号  $\left(\frac{-2}{16m + 2k + 1}\right) = -1$ , 即  $\left(\frac{-2}{16k + 5}\right) = -1, \left(\frac{-2}{16k + 7}\right) = -1, \left(\frac{-2}{16k + 15}\right) = -1$ , 所以方程(3)无正整数解。

综上所述, 当  $k = 3, 7$  时, 方程(1)无正整数解; 当  $k = 2$  时, 方程(1)无  $2|x$  的正整数解。

### 参考文献:

- [1] 柯召, 孙琦. 关于丢番图方程  $x^3 \pm 1 = Dy^2$  [J]. 中国科学, 1981, 24(12): 1453-1457.
- [2] 柯召, 孙琦. 关于丢番图方程  $x^3 \pm 1 = 3Dy^2$  [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 1981, 18(2): 1-5.
- [3] 高洁, 梁勇. 关于 Diophantine 方程  $x^3 - 1 = py^2$  [J]. 科学技术与工程, 2010, 10(18): 4461-4462.
- [4] 韩云娜. 关于 Diophantine 方程  $x^3 - 1 = 3py^2$  [J]. 科学技术与工程, 2010, 10(16): 3924-3925.
- [5] 乐茂华. 关于 Diophantine 方程  $x^3 - 1 = 3py^2$  [J]. 广西师范学院学报, 2005, 22(4): 22-23.
- [6] 梁勇, 韩云娜. 关于 Diophantine 方程  $x^3 \pm 1 = Dy^2$  [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2010, 23(5): 519-520, 523.
- [7] 夏圣亭. 不定方程浅说 [M]. 天津: 天津人民出版社, 1980.

## Indefinite Equation $x^3 - 1 = Dy^2$

DU Xian-cun<sup>a</sup>, LI Yu-long<sup>a</sup>, ZHAO Jin-e<sup>b</sup>

(a. Teachers' Educational College; b. Dept. of Mathematics, Honghe University, Mengzi 661199, China)

**Abstract:** Let  $D$  be an odd prime, using elementary theory of number methods, two sufficient conditions are obtained that the indefinite equation  $x^3 - 1 = Dy^2$  has no integer solutions, where  $D = 3(8m + k)(8m + k + 1) + 1 (m, k \in N, k \leq 7)$ .

**Key words:** indefinite equation; odd prime; sufficient condition; positive integer solution