文章编号:1673-1549(2012)03-086-02　　DOI:10.3969/j. issn. 1673-1549. 2012. 03. 022

Linex 损失下 Poisson 分布参数的 Bayes 估计

芦凌飞

(中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221116)

摘　要:记 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为来自 Poisson 总体容量为 n 的样本,在 Linex 损失函数下,给出了 Poisson 分布参数 θ 的 Bayes 估计并证明其可容许性,同时也得到了该参数的多层 Bayes 估计的表达式。

关键词:Poisson 分布;Linex 损失函数;Bayes 估计

中图分类号:O212. 6　　**文献标识码**:A

近些年来,泊松分布的重要性主要体现在两个领域:一是社会生活,对服务的各种要求,诸如电话交换台的呼唤数,网站访问数,公共汽车站候车乘客数等都近似服从泊松分布;二是物理科学,如粒子落到某区域的数目,热电子的发射等都服从泊松分布。

文献[1]研究熵损失下 Poisson 分布参数倒数的估计,文献[2]研究对称损失下 Poisson 分布参数倒数的 Bayes 估计,文献[3]研究刻度平方损失下 Poisson 分布参数的估计,本文在 Linex 损失函数下研究 Poison 分布的 Bayes 估计及多层 Bayes 估计。

在 Linex 损失函数

$$L(\theta,\delta) = e^{a(\delta-\theta)} - a(\delta-\theta) - 1 \tag{1}$$

意义下考虑泊松分布参数的估计问题,其中 δ 为 θ 的估计值,a 为该损失函数的尺度参数,$a \in R$ 且 $a \neq 0$,本文仅考虑 Linex 损失函数中 $a > 0$ 的情形,对于 $a < 0$ 的情形可类似讨论。容易知道,这个损失函数关于 δ 严格凸函数,且在 $\delta = \theta$ 处取得唯一的最小值。

1　参数 θ 的 Bayes 估计及可容许性

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 为一个简单随机泊松样本,$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为其实现值,则 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合概率分布为

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n \mid \theta) = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i!\right)^{-1}\theta^{T(X)}e^{-n\theta} \tag{2}$$

其中 $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i$。

定理 1　在 Linex 损失函数(1)下,对于任何先验分布,参数 θ 的 Bayes 估计为 $\delta_B = -\dfrac{1}{a}\ln E(e^{-a\theta} \mid X)$。

证明　令 $\delta(X)$ 为 θ 的任一估计,在 Linex 损失函数(1)下,$\delta(X)$ 对应的 Bayes 风险

$$E(L(\theta,\delta)) = E\{E[e^{a(\delta-\theta)} - a(\delta-\theta) - 1 \mid X]\} = E[e^{a\delta}E(e^{-a\theta} \mid X) - a\delta + aE(\theta \mid X) - 1] \tag{3}$$

式(3)左端 E 表示关于 θ 与样本 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 的联合分布取期望,若使(3)式达到最小,只需极小化 $e^{a\delta}E(e^{-a\theta} \mid X) - a\delta + aE(\theta \mid X) - 1$ 即可。令 $m(\delta) = e^{a\delta}E(e^{-a\theta} \mid X) - a\delta + aE(\theta \mid X) - 1$,对其关于 δ 求导并令其等于 0,得

$$\delta = -\frac{1}{a}\ln E(e^{-a\theta} \mid X)$$

由于 δ 是其唯一最小值点,从而得到 θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(X) = -\frac{1}{a}\ln E(e^{-a\theta} \mid X)$$

定理 2　若参数 θ 的先验分布为伽玛分布 $Ga(\alpha,\lambda)$,在 Linex 损失函数(1)下,θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(X) = -\frac{T(x)+\alpha}{a}\ln\frac{n+\lambda}{n+\lambda+a}$$

证明　参数 $\theta \sim Ga(\alpha,\lambda)$,则

$$\pi(\theta) = \frac{\lambda^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta},\alpha > 0,\lambda > 0,\theta > 0 \tag{4}$$

则 θ 的后验分布

$$\pi(\theta \mid X) = \frac{\pi(\theta)f(X \mid \theta)}{\int_{\Theta}\pi(\theta)f(X \mid \theta)\mathrm{d}\theta} = \frac{\theta^{T(x)+\alpha-1}e^{-(n+\lambda)\theta}}{\int_{\Theta}\theta^{T(x)+\alpha-1}e^{-(n+\lambda)\theta}\mathrm{d}\theta} = \frac{(n+\lambda)^{T(x)+\alpha}}{\Gamma(T(x)+\alpha)}\theta^{T(x)+\alpha-1}e^{-(n+\lambda)\theta}$$

则

收稿日期:2012-12-01
作者简介:芦凌飞(1989-),女,山西临汾人,硕士生,主要从事概率论与数理统计方面的研究,(E-mail)478506708@qq.com

$$E(e^{-a\theta}\mid X)=\frac{(n+\lambda)^{T(x)+\alpha}}{\Gamma(T(x)+\alpha)}\int_0^{+\infty}\theta^{T(x)+\alpha-1}e^{-(n+\lambda+a)\theta}\mathrm{d}\theta$$

$$=\left(\frac{n+\lambda}{n+\lambda+a}\right)^{T(x)+\alpha}$$

所以参数 θ 的 Bayes 估计为

$$\delta_B(X)=-\frac{T(x)+\alpha}{a}\ln\frac{n+\lambda}{n+\lambda+a}$$

引理 1[4]　在给定的 Bayes 决策问题中,若在给定的先验分布 $\pi(\theta)$ 下, θ 的 Bayes 估计 $\delta_B(X)$ 是唯一的,则它是可容许的。

从引理 1 看出,当损失函数是严格凸函数时,其 Bayes 估计必是唯一的,从而也是可容许的。

本文研究的 Linex 损失函数(1)是严格凸函数,则其 Bayes 估计必是唯一的,由引理 1 知,Bayes 估计 $\delta_B(X)$ 是可容许的。

2　参数 θ 的多层 Bayes 估计

当所给先验分布中超参数难以确定时,可以对超参数再给出一个先验,第二个先验称为超先验。通常,在理论上没有限制多层先验的步数,但在实际问题中多于两步的先验是不常见的,选用无信息先验作为第二步先验是一种好的策略。

从上面的 Bayes 估计可以看到先验分布中会有超参数 α,λ, 此时把超参数看成相互独立的随机变量, α, λ 的超先验分布分别为均匀分布,设

$$\pi_2(\alpha)=U(0,1),\ \pi_2(\lambda)=U(0,c)\qquad(5)$$

c 为常数,从稳健性考虑,取 $c\in(2,8)$ 为宜[5]。

定理 3　对 Poisson 分布(2)式在两层先验(4)式和(5)式及 Linex 损失函数(1)下,参数 θ 的两层 Bayes 估计为

$$\delta_B(X)=-\frac{1}{a}\ln\frac{\displaystyle\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^\alpha\Gamma(T(x)+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(n+\lambda+a)^{T(x)+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^\alpha\Gamma(T(x)+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(n+\lambda)^{T(x)+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}$$

证明　由上述两层先验分布可知, θ 的先验分布为

$$\pi(\theta)=\int_0^1\int_0^c\pi(\theta\mid\alpha,\lambda)\pi_2(\alpha)\pi_2(\lambda)\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda$$

$$=\frac{1}{c}\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\lambda\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda$$

从而 θ 的后验分布为

$$\pi(\theta\mid X)=\frac{\pi(\theta)f(X\mid\theta)}{\int_0^{+\infty}\pi(\theta)f(X\mid\theta)\mathrm{d}\theta}$$

$$=\frac{\displaystyle\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{T(x)+\alpha-1}e^{-(n+\lambda)\theta}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^\alpha\Gamma(T(x)+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(n+\lambda)^{T(x)+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}$$

进而求得

$$E(e^{-a\theta}\mid X)=\int_0^{+\infty}e^{-a\theta}\pi(\theta\mid X)\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\displaystyle\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^\alpha\Gamma(T(x)+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(n+\lambda+a)^{T(x)+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^\alpha\Gamma(T(x)+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(n+\lambda)^{T(x)+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}$$

所以

$$\delta_B(X)=-\frac{1}{a}\ln\frac{\displaystyle\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^\alpha\Gamma(T(x)+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(n+\lambda+a)^{T(x)+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}{\displaystyle\int_0^1\int_0^c\frac{\lambda^\alpha\Gamma(T(x)+\alpha)}{\Gamma(\alpha)(n+\lambda)^{T(x)+\alpha}}\mathrm{d}\alpha\mathrm{d}\lambda}$$

参 考 文 献:

[1] 王德辉,赖 民,宋立新.熵损失下 Poisson 分布参数倒数的估计[J].吉林大学学报,2000,23(4):17-22.

[2] 徐 宝,于春艳,孙宪军.一种对称损失下 Poisson 分布参数倒数的 Bayes 估计[J].吉林师范大学学报,2006,32(3):53-54.

[3] 宋立新,陈永胜,许俊美.刻度平方损失下 Poisson 分布参数的估计[J].兰州理工大学学报,2008,34(5):152-154.

[4] 茆诗松.贝叶斯统计[M].北京:中国统计出版社,1999.

[5] 韩 明.多层先验分布的构造及其应用[J].运筹与管理,1997,6(3):31-40.

Bayes Estimation of Poisson Distribution Parameter Under Linex Loss Function

LU Ling-fei

(School of Science, China University of Mining and Technology, Xuzhou 221116, China)

Abstract: The Bayes estimation of the Poisson distribution parameter under Linex loss function is made and its admissibility is certified for a Poisson distribution $X_1, X_2, \cdots, X_n$ with given capacity. The expression of Bayes estimation for multiplayer parameters is also given.

Key words: Poisson distribution; Linex loss function; Bayes estimation