

基于拉普拉斯模型的双树复小波域图像降噪

陈明举, 杨平先

(四川理工学院自动化与电子信息学院, 四川 自贡 643000)

摘要:分析了图像复小波变换的特点,根据复小波系数服从拉普拉斯分布的特性,采用最大后验概率估计,推导出一种复小波域的软阈值去噪方法。在实验中,分别与图像小波域、复小波域的高斯概率分布模型的去噪方法进行对比分析。结果表明,文中的去噪方法,在去除噪声的同时更好地保留图像的细节信息,且峰值信噪比有所提高,取得很好的降噪性能。

关键词:复小波;拉普拉斯模型;贝叶斯法则;最大后验概率估计

中图分类号:TN911.73

文献标识码:A

引言

一般来说,现实中的图像都是带噪声的,图像去噪是图像预处理阶段的一个重要环节。小波变换凭借其良好的时频特性,以及在非平稳信号方面的独特优势使得小波去噪成为图像去噪领域中的一个重要研究方向。其中,比较经典的一类降噪算法是基于小波的阈值收缩法,这类算法主要利用了小波变换域中信号的幅值优势,因而可以用阈值的方法来保留大于阈值的小波系数,达到降噪的目的。Donoho 等提出的基于小波系数的非线性小波阈值去噪的概念,在此基础上通过对阈值的选取和小波系数统计特性的分析涌现出了许多优秀算法如 BayesShrink、HMT 多尺度高斯混合模型^[1-3]等。

传统的离散小波变换存在着时移敏感性、方向性信息少和缺少相位信息等缺点,造成了传统小波在实际应用中存在或多或少的缺陷。1999 年, Kingsbury 提出了双树复数小波变换(Dual Tree Complex Wavelet Transform, DT-CWT)^[4-5],提供 6 个方向的信息,且具有平移不变性和精确的相空间信息,具有较好的方向性和较准确的空间信息^[6],在图像处理应用领域有着广泛的应用前景。

在图像去噪中使用不同的模型可以推导出不同的去噪算法,然而这些模型都是对小波系数的近似描述,不够准确。对小波系数分布模型通常采用高斯模型可

以达到较好的去噪效果^[3,7,8]。然而,Sendur 等人对自然图片进行统计分析,证明了拉普拉斯模型更能描述复小波系数的分布^[10]。

本文在 Sendur 提出复小波系数服从拉普拉斯的情况下,提出一种二元树复小波的拉普拉斯模型降噪算法,利用二元树复小波变换的近似平移不变性和良好的方向选择性,通过复小波系数分布的拉普拉斯模型来对各个子带系数进行贝叶斯框架下的最大后验概率(Maximum a Posteriori, MAP)估计,从而达到降低噪声的目的,并与高斯模型去噪方法进行对比分析,实验结果证明了该算法的有效性。

1 二元数复小波变换

离散小波变换作为信号和图像处理的工具取得了很大的成果,但是传统的离散小波变换有自身的局限性,仍然存在缺乏平移不变性、方向选择性有限、频谱混叠性与震荡性等缺点。针对这一问题, Kingsbury 提出了 DT-CWT 方法,其由两个平行的小波树组成,它通过两个离散小波变换来并行处理输入信号,即可以分别得到小波系数的实虚部。复小波可以表示为:

$$\varphi(t) = \varphi_r(t) + \varphi_i(t) \quad (1)$$

$\varphi_r(t)$ 、 $\varphi_i(t)$ 分别表示复小波的实部和虚部,他们都是实函数,这样双树复小波变换可以表示为两个独立的实小波变换,它包含两个平行的分解树:树 A 和树 B。

收稿日期:2012-04-04

基金项目:四川省教育厅基金项目(10ZA135);四川省教育厅青年基金项目(10ZB128)

作者简介:陈明举(1982-),男,重庆大足人,讲师,硕士,主要从事信息处理方面的研究,(E-mail)mailmiej@163.com

二维双树复小波变换可以通过一维双树复小波的张量积得到:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x)\varphi(y) \tag{2}$$

其中,

$$\varphi(x) = \varphi_h(x) + j\varphi_g(x), \varphi(y) = \varphi_h(y) + j\varphi_g(y)$$

即:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & \varphi_h(x)\varphi_h(y) - \varphi_g(x)\varphi_g(y) \\ & + j[\varphi_g(x)\varphi_h(y) + \varphi_h(x)\varphi_g(y)] \end{aligned} \tag{3}$$

双树复小波变换分解二维信号与离散小波变换类似,利用可分离的滤波器先沿着列再沿着行实现分解。就可以得到2个近似(低频)子带和6个细节(高频)子带,后者分别对应于图像中6个不同方向($\pm 15^\circ$ 、 $\pm 45^\circ$ 、 $\pm 75^\circ$)的信息,如图1所示。因此,DT-CWT具有较佳的方向选择特性,可以更好地处理图像边缘纹理等细节信息。

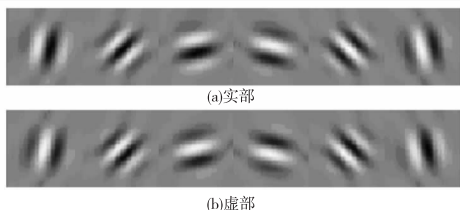


图1 双数复小波分解的二维脉冲响应

2 基于拉普拉斯模型的贝叶斯降噪算法

实际中,图像通常受到加性高斯噪声的干扰,可把干扰的图像表示为

$$g = x + n \tag{4}$$

其中, x 为原始未受干扰的图像, n 为服从 $N(0, \sigma^2)$ 的高斯白噪声, g 为干扰后的图像。降噪的目的就是通过一定的方法,尽可能接近地从测量信号 g 中恢复出真实信号 x 。在正交小波变换域中,可以表示为:

$$y = w + n \tag{5}$$

(5)式中: y 为干扰图像信号的小波变换系数; w 为真实图像的小波系数; n 为噪声的小波系数。因此,图像降噪就转换为在小波变换域中通过被干扰图像的小波变换系数 y 中尽可能真实地恢复出真实信号的小波系数 w 。

对(5)式的求解 w 是一个估计理论中的经典问题。是从被噪声污染的观测值 y 中估计出信号的真实值 w 。本文采用最大后验估计(MAP)方法对信号进行降噪处理。根据Bayes法则,有:

$$\begin{aligned} \bar{w}(y) = & \arg \max_w [p_{y|w}(y|w) \cdot p_w(w)] \\ = & \arg \max_w [p_{y|w}(y-w) \cdot p_w(w)] \end{aligned} \tag{6}$$

由(6)式可知,对图像真值的小波系数的最大后验

估计可以通过噪声以及真值的小波系数的概率分布函数得到。

(6)上式等价于求解

$$\begin{aligned} \bar{w}(y) = & \arg \max_w [\log(p_{y|w}(y-w)) + \\ & \log(p_w(w))] \end{aligned} \tag{7}$$

前面已知,噪声信号服从零均值的高斯分布 $N(0, \sigma^2)$:

$$p_n(n) = \frac{1}{\sigma_n \sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right) \tag{8}$$

在已有小波域去噪算法中,都是假设复小波系数服从高斯分布的情况下^[3-4,7-9],使用贝叶斯风险估计,从而得到阈值 T 或真实图像小波系数的表达式。然而,复小波系数服从高斯分布是不准确的,文献[6]通过对自然图片进行统计分析,确定自然图片的复小波系数的统计特性用拉普拉斯分布表示更为准确。先假设复小波系数符合拉普拉斯分布的情况下,推到阈值 T 的表达式。

假设复小波系数的拉普拉斯分布的表达式为

$$p_w(w) = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma} \exp\left(-\frac{\sqrt{2}|w|}{\sigma}\right) \tag{9}$$

令

$$f(w) = \log(p_w(w)) = -\log(\sigma\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}|w|}{\sigma}$$

(7)式中对 w 求导并令导数为零得:

$$\frac{y - \bar{w}}{\sigma_n^2} + f'(\bar{w}) = 0 \tag{10}$$

进而可得

$$\bar{w}(y) = \text{sign}(y) \left(|y| - \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma} \right) u\left(|y| - \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma} \right) \tag{11}$$

(11)式可进一步写出:

$$\bar{w}(y) = \text{soft}\left(y, \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma}\right) = \begin{cases} 0 & \text{if } |y| \leq \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma} \\ y - \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma} & \text{if } y > \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma} \\ y + \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma} & \text{if } y < -\frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma} \end{cases} \tag{12}$$

由(12)可以看出,在复小波域对系数进行估计,实际上是复小波进行软阈值处理,其阈值为:

$$T = \frac{\sqrt{2}\sigma_n^2}{\sigma} \tag{13}$$

σ 分别为复小波域真实图像复小波系数的标准方差、噪声在复小波域的方差。可以通过对图像的复小波系数的估计得到复小波域噪声方差 σ_n ,采用鲁棒均值噪声

估计方法^[11]对小波系数估算噪声系数标准方差为:

$$\sigma_n = \frac{\text{median}(|y_i|)}{0.6745} \quad (14)$$

由于含噪图像的复小波系数标准方差 σ_y 与 σ, σ_n 的关系为:

$$\sigma_y^2 = \sigma^2 + \sigma_n^2 \quad (15)$$

因此,可以用 σ_y 与 σ_n 来估计 σ , 即

$$\sigma = \sqrt{\sigma_y^2 - \sigma_n^2} \quad (16)$$

σ_y 可以通过计算的小波系数点的邻域 $N(k)$ 的 M 个平均值来得到,即

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{M} \sum_{y_i \in N(k)} y_i^2 \quad (17)$$

通过上述推导,我们可以得出基于拉普拉斯模型复小波域的 MAP 估计去噪方法:

- (1) 确定分解层次,对噪声图像进行双树复小波正变换;
- (2) 按式(14) - (17) 计算复小波域噪声标准方差 σ_n 、真实图像标准方差 σ ;
- (3) 按式(13) 计算软阈值,并对各层上的小波系数进行软阈值处理;
- (4) 对新的复小波系数双树复小波反变换得到消噪后的图片。

3 试验结果及分析

为证明本文算法有效,选取 512×512 的图像 Lena 和 Toys 等多幅图片作为标准测试图像,加入不同强度的高斯噪声进行测试。采用峰值信噪比 (Peak Signal to Noise Ratio, PSNR) 作为客观评价标准,与小波域高斯模型的贝叶斯阈值算法 (DWT - GSM) 和复小波域高斯模型的贝叶斯阈值算法 (CWT - GSM) 进行比较。首先,采用相同强度高斯噪声干扰后的不同图片进行实验,得到的数据见表 1。其次,采用不同强度高斯干扰的 Lena 图片进行去噪实验,得到的数据见表 2。

表 1 不同图片不同算法测试结果

图片名称	DWT - GSM	CWT - GSM	本文算法
Lena	28.63	29.87	30.05
Toys	31.38	32.26	32.58
Woman	27.83	28.62	29.24
Einstain	26.29	27.37	27.91
Wood	29.37	29.83	30.24
Donna	30.02	30.53	31.22
Elaine	27.63	28.13	28.53
Peppers	28.53	29.42	29.83
Zelda	29.03	29.68	30.19

从表 1 中的峰值信噪比也可以看出,复小波域去噪的峰值信噪比较高,这是由于复小波域的具有更多

的方向选择性和更好的平移不变性。而本文算法由于对复小波域采用拉普拉斯统计模型,得到的峰值信噪比是最高的,说明拉普拉斯统计模型更准确描述复小波系数的分布,本文提出的算法具有较强的先进性。

表 2 不同强度干扰的 Lena 图片测试

噪声强度	DWT - GSM	CWT - GSM	本文算法
10	31.28	32.31	32.62
20	29.05	30.43	30.85
30	27.86	28.57	28.83
40	26.21	27.03	27.38
50	25.26	26.19	26.52

在细节保持方面,选取 lena 与 Toys 图像进行不同的算法实验进行对比观察,实验结果如图 2、图 3 所示。CWT - GSM 与本文算法保留了更多的图像纹理细节特征,比如 Lena 图像的帽子和毛发、Toys 图像小熊衣服细节等部分细节保持效果比 DWT - GSM 算法去噪后的图像效果都要好,这也是由于双树复小波变换具有更多方向选择性的缘故。CWT - GSM 与本文算法相比,本文算法保留了更多的细节特征,再一次说明拉普拉斯统计模型更准确描述复小波系数的分布特性。



图 2 Lena 图像不同算法消噪结果

4 结 论

本文针对复小波域系数符合拉普拉斯分布的特点,对各个子带系数进行贝叶斯框架下的最大后验概率估计,推导出一种复小波域的一种软阈值去噪算法,通过实验对比分析,证明了本文提出的算法具有以下优点:

- (1) 由于 MAP 估计是在复小波域进行,复小波域具有更多方向性选择的特点,所以在去噪的图像中更多保留了图像的细节信息;
- (2) 对复小波系数采用拉普拉斯统计模型进行

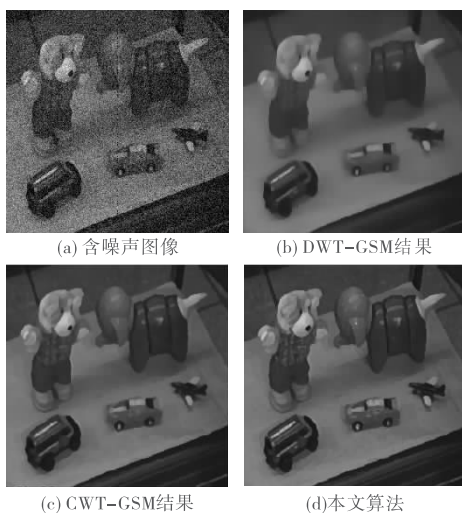


图3 Toys 图像不同算法消噪结果

MAP 估计,拉普拉斯模型更准确的描述了复小波系数的分布,去噪后的视觉效果更好,峰值信噪比更高。本文算法具有一定的先进性。

参考文献:

- [1] Sendur L, Selesnick I W. Bivariate Shrinkage with local variance estimation[J]. IEEE Signal Processing Letters, 2002(9):438-441.
- [2] Crouse M S, Nowak R D, Baraniuk R G. Wavelet-based statistical signal processing using Hidden Markov models [J]. IEEE Trans, on Signal Processing, 1988, 46(4): 886-902.
- [3] Portilla J, Strela V, Wainwright M J, et al. Image denoising using scale mixture of Gaussian in the wavelet domain [J]. IEEE Trans, on Image Processing, 2003, 12(11):1338-1351.
- [4] Romberg J, Choi H, Baraniuk R, et al. Multiscale classification using complex wavelets and Hidden Markov Tree Models[C]. Proc. ICIP 2000, Vancouver, Sept 2000:371-374.
- [5] Kingsbury N G. Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals[J]. Appl. Comp. Harmonic Anal, 2000, 10(3):234-253.
- [6] Selesnick I W, Baraniuk R G, Kingsbury N G. The Dual-Tree complex wavelet transform: A coherent framework for multiscale signal and image processing[J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2005, 22(6):123-151.
- [7] 刘薇,徐凌,杨光.基于双树复小波二元统计模型的图像去噪方法[J].中国图象图形学报,2009,14(7):1291-1297.
- [8] 杨国梁,闫谦时.基于贝叶斯估计的双树复小波图像降噪技术[J].西安工程大学学报,2009,23(3):75-79.
- [9] 周顺勇,李雷.一种改进的小波域图像去噪法[J].四川理工学院学报:自然科学版,2009,22(3):83-86.
- [10] Sendur L, Selesnick I W. Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2002, 50(11):2744-2756.
- [11] Chang S G, Yu Bin, Vetterl M. Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression[J]. IEEE Trans Image Processing, 2000, 9(9):1532-1546.

Image Denoising Using Laplacian Model in Dual Tree Complex Wavelet Domain

CHEN Ming-ju, YANG Ping-xian

(School of Automation and Electronic Information, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: Through discussing the characteristics of the image's complex wavelet coefficients, which keeps to the Laplacian distribution, the maximum posterior probability estimate is adopted and a kind of complex wavelet soft threshold denoising method is derived. In this experiment, the method compares to the gaussian distribution model in the wavelet domain and in the complex wavelet domain respectively. The experiment results show that the proposed model can remove the noise, preserve more image details and gain higher peak signal-noise ratio. It is of good performance in image denoising.

Key words: complex wavelet; Laplace distribution; Bayes theorem; maximum a posteriori probability estimation