第 25 卷第 2 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 25　No. 2
2012 年 4 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Apr. 2012
文章编号:1673-1549(2012)02-0095-02

不定方程 $m^4x(x+1)(x+2)(x+3)=(m^4-1)y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的整数解

郑　惠

(阿坝师范高等专科学校数学系, 四川 汶川 623000)

摘　要:运用初等方法对不定方程 $ax(x+1)(x+2)(x+3)=by(y+1)(y+2)(y+3)$ 的整数解进行了研究,得到了当 $a=m^4,b=m^4-1$ 时方程的非负整数解仅有 $(x,y)=(0,0)$。

关键词:Diophantine 方程;整数解;连续正整数;基本解

中图分类号:O156.7　　**文献标识码**:A

引　言

设 N 是全体正整数的集合, a,b 是大于 1 的正整数。方程

$$a(x+1)\cdots(x+w)=by(y+1)\cdots(y+t) \tag{1}$$

是一类基本而又重要的高次 Diophantin 方程[1-2],很多有关连续正整数乘积的数论问题都可归结为该方程的求解问题。在一般情况下,方程(1)的求解问题十分困难,有许多情形尚未完全解决,目前只解决了一些特殊情况。

如当 $w=t=3$ 时,即方程

$$a(x+1)(x+2)(x+3)=by(y+1)(y+2)(y+3) \tag{2}$$

当 $a=2,b=1$ 时,*Cohn J H E*[3] 证明了方程(2)仅有正整数解 $(x,y)=(4,5)$。当 $a=3,b=1$ 时,Ponnudurait T[6] 证明了方程(2)仅有正整数解 $(x,y)=(2,3)$ 和 $(5,7)$。随后宣体佐[7-8] 证明了:当 $a=5,b=1$ 时,方程(2)仅有正整数解 $(x,y)=(1,2)$。当 $a=p^{2m},b=1$ 时,其中 p 是素数,m 是正整数,徐学文[4] 证明了方程(2)无正整数解。而乐茂华[5-6] 获得了该方程的一般性结论,他证明了:当 $a=n^4,b=1$ 时,其中 n 是大于 1 的正整数,方程(2)无正整数解。段辉明、杨春德[9] 证明了:当 $a=1,b=19$ 时,方程(2)无正整数解。

本文运用初等方法对方程(2)的整数解进行了研究,得到了当 $a=m^4,b=m^4-1$ 时方程(2)的非负整数解仅有 $(x,y)=(0,0)$。

1　基本引理

引理 1　设 $x_0+y_0\sqrt{D}$ 为 Pell 方程 $x^2-Dy^2=1$ 的基本解,则其全部解为:$x+y\sqrt{D}=\pm(x_0+y_0\sqrt{D})^n$,其中 $n\in N$。

证明　见文献[10]。

引理 2　设 $A>1$ 和 $B>0$ 是无平方因子整数,$\varepsilon=x+y\sqrt{B}$ 为 Pell 方程 $x^2-By^2=1$ 的基本解。定义 $\varepsilon^n=x_n+y_n\sqrt{B}$, $n=1,2,\cdots$。如果方程 $A^2X^4-BY^2=1$ 可解,则至多有一个正整数解 (X,Y),且 $AX^2+Y\sqrt{B}=\varepsilon^t$,其中 t 是满足 $x_t\equiv 0(\mathrm{mod}A)$ 的最小正整数。

证明　见文献[11]。

2　定理及证明

定理 1　若 $a=m^4,\ b=m^4-1,\ 2\mid m$,则方程(2)的非负整数解仅有 $(x,y)=(0,0)$。

证明　当 $a=m^4,\ b=m^4-1$ 时,方程(2)为

$$(m^2(x^2+3x+1))^2-(m^4-1)(y^2+3y+1)^2=1 \tag{3}$$

由于 Pell 方程 $X^2-(m^4-1)Y^2=1$ 的基本解为:$\varepsilon=m^2+\sqrt{m^4-1}$。因此由引理 1 知方程(3)的所有正整数解可表示为:

$$m^2(x^2+3x+1)+\sqrt{m^4-1}(y^2+3y+1)=\varepsilon^k=(m^2+\sqrt{m^4-1})^k \tag{4}$$

其中 $k\in N$。

收稿日期:2012-01-30

基金项目:阿坝师专科研基金重点项目(ASA11-25);四川省教育厅自然科学基金项目(12ZB002)

作者简介:郑 惠(1977-),女,四川南充人,讲师,主要从事数论以及几何方面的研究,(E-mail)zh_9203@qq.com

情形1　若k为偶数,则可令 $k=2k_1$, $2k_1\in\mathrm{N}$,于是由(4)式可得:

$$2\sqrt{m^4-1}(y^2+3y+1)=(m^2+\sqrt{m^4-1})^k-(m^2-\sqrt{m^4-1})^k$$

故

$$y^2+3y+1=2m\sum_{j=1}^{[\frac{k_1+1}{2}]}\binom{k_1}{2j-1}(2m^4-1)^{k_1-2j+1}m(2m^2)^{2j-2}(m^4-1)^{j-1}$$

则 $2m\mid y^2+3y+1$,但与 y^2+3y+1 为奇数矛盾。故此时方程(2)无解。

情形2　若k为奇数,令 $A=x^2+3x+1$, $B=m^4-1$, $Y=y^2+3y+1$,则方程(3)可化为:

$$A^2m^4-BY^2=1 \tag{5}$$

因为Pell方程 $x^2-By^2=1$ 的基本解为 $\varepsilon=m^2+\sqrt{m^4-1}$,所以由引理2可得,方程(5)至多有一组正整数解,而且可表示为:

$$m^2(x^2+3x+1)+\sqrt{m^4-1}(y^2+3y+1)=(m^2+\sqrt{m^4-1})^k \tag{6}$$

故由方程(6)可得:

$$m^2(x^2+3x+1)=\frac{1}{2}((m^2+\sqrt{m^4-1})^k+(m^2-\sqrt{m^4-1})^k)$$

则有

$$m^2(x^2+3x+1)=(m^2)^k+\binom{k}{2}(m^2)^{k-2}(m^4-1)+\cdots+\binom{k}{k-3}m^2(m^4-1)^{\frac{k-3}{2}}+\binom{k}{k-1}(m^4-1)^{\frac{k-1}{2}}$$

从而

$$m^2\mid k(m^4-1)^{\frac{k-1}{2}}$$

但与k为奇数以及 $\gcd(m^2,m^4-1)=1$ 矛盾。所以方程(5)仅有正整数解 $A=Y=1$,故方程(2)在 $a=m^4$, $b=m^4-1$ 时,仅有非负整数解 $(x,y)=(0,0)$。

于是定理1得证。

推论1　不定方程 $16x(x+1)(x+2)(x+3)=15y(y+1)(y+2)(y+3)$ 的非负整数解仅有 $(x,y)=(0,0)$。

证明　因为 $16=2^4$, $15=2^4-1$,所以原不定方程等价于 $2^4x(x+1)(x+2)(x+3)=(2^4-1)y(y+1)(y+2)(y+3)$。故根据定理1可知此方程仅有非负整数解 $(x,y)=(0,0)$。

参 考 文 献:

[1] 华罗庚.数论导引[M].北京:科学出版社,1979.

[2] 柯召,孙琦.数论讲义[M].北京:高等教育出版社,1986.

[3] Cohn J H E,The diophantine equation x(x+1)(x+2)(x+3)=2y(y+1)(y+2)(y+3)[J].Pacific J. Math.,1971,2:331-335.

[4] Ponnudurai T,The diophantine equationx(x+1)(x+2)(x+3)=3y(y+1)(y+2)(y+3)[J].London J Math Soc.,1975,10(3):232-240.

[5] 宣体佐.关于不定方 x(x+1)(x+2)(x+3)=5y(y+1)(y+2)(y+3)[J].北京师范大学学报:自然科学版,1982,18(3):27-33.

[6] 徐学文.关于不定方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=p^{2m}y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].华中师范大学学报:自然科学版,1997,31(3):257-259.

[7] 乐茂华.Diophantine 方程 $x(x+1)(x+2)(x+3)=a^4y(y+1)(y+2)(y+3)$[J].商丘师范学院学报,2009,25(6):7-8.

[8] 乐茂华.关于 Diophantine 方程 $(X^m+1)/(X^m+1)=y^n+1$[J].四川理工学院学报:自然科学版,2005,18(4):1-2.

[9] 段辉明,杨春德.关于不定方程 x(x+1)(x+2)(x+3)=19y(y+1)(y+2)(y+3)[J].四川师范大学学报:自然科学版,2009,32(1):60-63.

[10] 曹珍富.丢番图方程引论[M].哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,1986.

[11] Chen J H.A note on the Diophantine equation ax^2-By^4=1[J].Acta Arith,2001,96(3):205-212.

Solutions of Diophantine Equation $m^4x(x+1)(x+2)(x+3)=(m^4-1)y(y+1)(y+2)(y+3)$

ZHENG Hui

(Department of Mathematics, ABa Teachers College, Wenchuan 623000, China)

Abstract: The solution of Diophantine eqeation $ax(x+1)(x+2)(x+3)=by(y+1)(y+2)(y+3)$ is discussed by using elementary methods. It is proved that the eqution has only non-negative integer solution $(x, y)=(0, 0)$ when $a=m^4$, $b=m^4-1$.

Key words: Diophantine equation; integer solution; continued positive integers; fundamental solution