文章编号:1673-1549(2012)02-0088-03

一类 Weierstrass 函数图像的 K －维数式

黄　铭[1], 张　静[2], 刘鸿博[2], 朱春梅[3]

(1. 四川工商职业技术学院, 成都　611830;2. 四川水利职业技术学院, 成都　611830;
3. 四川水产学校, 成都　611731)

摘　要:Weierstrass 函数是一类处处连续不可微的函数,其函数图像具有分形性质。研究 Weierstrass 函数图像的分形维数在分形几何中具有非常重要的地位。K －维数是介于 Hausdorff 维数和 Box 维数之间的分形维数,通过研究一类 Weierstrass 函数图像的 K －维数,证明了这类函数图像的 K －维数为 1,从而进一步揭示出这类 Weierstrass 函数图像的 Hausdorff 维数、Box 维数和 K －维数之间的关系。

关键词:Weierstrass 函数; K －维数;函数图像

中图分类号:O186　　　　**文献标识码**:A

引　言

众所周知,Weierstrass 函数图像的 Hausdorff 维数的下界至今尚未解决。T. Y. Hu 和 K. S. Lau 引进了介于 Box 维数和 Hausdorff 维数之间的 K －维数,并证明了 $W(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{-\alpha i} \sin(\lambda^{i} \pi x), \lambda > 1, 0 < \alpha < 1$ 的 Weierstrass 函数图像的 K －维数等于 $2-\alpha$ [1]。最近,又得到这类 Weierstrass 函数图像的 K －维数的简单证明[2-4]。本文给出这类 Weierstrass 函数图像在 $\alpha = 1$ 时的 K －维数的证明。

设 $f:[0,1] \to R$ 的连续函数,以 Γ_f 表示函数图像,$\Gamma_f = \{(x, f(x)): 0 \leqslant x \leqslant 1\}$。对任意开区间 $I \subset [0,1]$,令 q_I 为覆盖 $f(I)$ 的正方形 $I \times I'$ 最少个数,记 $OSC(f,I)$ 为 f 在 I 上的振幅,即 $OSC(f,I) = \sup_{x_1, x_2 \in I} |f(x_1) - f(x_2)|$,则有:

$$q_I - 1 \leqslant OSC(f,I)/|I| \leqslant q_I \tag{1}$$

设 $s \geqslant 0$, 定义 $P: R^2 \to R$ 为自然投影,即 $P(x,y) = x$,对任意的 $E \subset \Gamma_f$, 记 C 为 $P(E)$ 的任意开覆盖族。定义

$$\varphi^s(E, C) = \sum_{I \in C} q_I |I|^8$$

$$K^s(E) = \lim_{\sigma \to 0+} \inf_{|C| < \delta} \varphi^s(E)$$

其中: $|C| = \sup\{|I|: I \in C\}$, 可以证明 $K^s(E)$ 为一测度[1]。

定义 K －维数:

$$K-\dim \Gamma_f = \inf\{s > 0: K^s(\Gamma_F) = 0\}$$

同时易证上述定义等价于:

$$K-\dim \Gamma_f = \sup\{s > 0: K^s(\Gamma_F) = \infty\}$$

1　命题和引理

T. Y. Hu 和 K. S. Lau 证明了当 $1 < s < 2$ 时,利用 f 在每一小区间上的振幅计算 Γ_f 的 K^s －测度的形式[1]。当 $s = 1$ 时有:

命题 1　设 f 是 $[0,1]$ 上连续的函数,则

$$\lim_{\sigma \to 0+} \inf_{|\pi| < \delta} \sum_{\pi} OSC(f, \Delta_i) \leqslant K(\Gamma_f) \leqslant 1 + \lim_{\sigma \to 0+} \inf_{|\pi| < \delta} \sum_{\pi} OSC(f, \Delta_i)$$

其中: $\pi = \{0 = x_0 < x_2 \cdots < x_n = 1\}$ 是 $[0,1]$ 上的划分, $\Delta_i = [x_{i-1}, x_i)$, $|\pi| = \max_{1 \leqslant i \leqslant \pi} |\Delta_i|$。

证明　首先证明 $K(\Gamma_f) \leqslant 1 + \lim_{\sigma \to 0+} \inf_{|\pi| < \delta} \sum_{\pi} OSC(f, \Delta_i)$ 成立。对于 $\delta > 0$, 令 $\pi = \{0 = x_0 < x_1 \cdots < x_n = 1\}$ 是 $[0,1]$ 上的划分,则 $\sum_{i=1}^{n} |\Delta_i| = 1$。令 C 为 $[0,1]$ 上的开覆盖, Δ_i^0 为 Δ_i 的内部, $\Delta'_i = (x_i - \eta, x_i + \eta)$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 且 $\sum_{i=1}^{n} |\Delta'_i| = \sum_{i=1}^{n} |2\eta| < \delta$, 利用(1)式,有:

收稿日期:2011-11-30

作者简介:黄 铭(1971-),男,成都人,助教,主要从事数学与应用数学方面的研究,(E-mail)hm11@163.com

$$\varphi([0,1],C)=\sum_{I\in C}q_I|I|=$$
$$\sum_{i=1}^{N}q_{\Delta_i^0}|\Delta_i^0|+\sum_{i=1}^{N}q_{\Delta'_i}|\Delta'_i|=$$
$$\sum_{i=1}^{N}q_{\Delta_i^0}|\Delta_i|+\sum_{i=1}^{N}q_{\Delta'_i}|\Delta_i|\leqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}(1+OSC(f,\Delta_i)/|\Delta_i|)|\Delta_i|+$$
$$\sum_{i=1}^{n}(1+OSC(f,\Delta'_i)/|\Delta'_i|)|\Delta'_i|=$$
$$\sum_{i=1}^{n}(|\Delta_i|+OSC(f,\Delta_i))+\sum_{i=1}^{n}(|\Delta'_i|+OSC(f,\Delta'_i))=$$
$$\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i|+\sum_{i=1}^{n}2\eta+\sum_{i=1}^{n}OSC(f,\Delta_i)+\sum_{i=1}^{n}OSC(f,\Delta'_i)$$

由于 f 是 $[0,1]$ 上连续的函数,对 $\forall\varepsilon>0$ 和 $x_1,x_2\in\Delta'_i$,$\exists\delta>0$,使得当 $|x_1-x_2|<\delta$ 时,有 $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,因为 $\sum_{i=1}^{n}|\Delta'_i|<\delta$,则有 $|x_1-x_2|<\delta$ 成立,由 x_1,x_2 的任意性,知 $OSC(f,\Delta'_i)=|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$,取 $\varepsilon=|\Delta_i|$,得

$$\sum_{i=1}^{n}OSC(f,\Delta'_i)\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\Delta'_i|<\delta$$

所以

$\varphi([0,1],C)\leqslant 1+2\delta+\sum_{i=1}^{n}OSC(f,\Delta_i)$。当 $\delta\to 0$ 时,得:

$$K(\Gamma_f)\leqslant 1+\lim_{\sigma\to 0+}\inf_{|\pi|<\delta}\sum_{\pi}OSC(f,\Delta_i)$$

现在证明

$$K(\Gamma_f)\geqslant\lim_{\sigma\to 0+}\inf_{|\pi|<\delta}\sum_{\pi}OSC(f,\Delta_i)$$

同理,利用(1)式有:

$$\varphi([0,1],C)=\sum_{I\in C}q_I|I|=$$
$$\sum_{i=1}^{N}q_{\Delta_i^0}|\Delta_i^0|+\sum_{i=1}^{N}q_{\Delta'_i}|\Delta'_i|\geqslant$$
$$\sum_{i=1}^{n}OSC(f,\Delta_i^0)+\sum_{i=1}^{n}OSC(f,\Delta'_i)=$$
$$\sum_{i=1}^{n}OSC(f,\Delta_i^0)$$

于是得:

$$K(\Gamma_f)\geqslant\lim_{\sigma\to 0+}\inf_{|\pi|<\sigma}\sum_{\pi}OSC(f,\Delta_i)$$

命题证毕。

命题 2[1] 设 $E\subset X$ 若 $K^s(E)<\infty$ 则:$K-\dim E\leqslant s$;若 $K^s(E)>0$,则 $K-\dim E\geqslant s$。

计算 Weierstrass 函数

$$W(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-i}\sin(\lambda^i\pi x),\lambda>1$$

的 K－维数,还需要下面的引理。

引理 1[3] 对任意 $t\in\mathbf{R}$,$\exists\beta\in[\frac{\pi}{2},\pi)$,使得

$$|\sin(t+\beta)-\sin t|\geqslant\frac{1}{2}$$

引理 2 Weierstrass 函数

$$W(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-i}\sin(\lambda^i\pi x),\lambda>1$$

对于 $0<h<1$ 有:

$$|W(x+h)-W(x)|\leqslant\frac{2}{\lambda-1}=c$$

其中 C 为与 h 无关的常数。

证明 对任一给定的 $0<h<1$,

$$|W(x+h)-W(x)|=$$
$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-i}\sin(\lambda^i\pi(x+h))-\sum_{i=1}^{n}\lambda^{-i}\sin(\lambda^i\pi x)\right|\leqslant$$
$$2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-i}=2\cdot\frac{\lambda^{-1}}{1-\lambda^{-1}}=\frac{2}{\lambda-1}=c$$

2 主要定理

定理 1 Weierstrass 函数

$$W(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-i}\sin(\lambda^i\pi x)$$

当 $\lambda>5$ 时,$K-\dim\Gamma_W=1$。

证明 首先证明 $K-\dim\Gamma_W\leqslant 1$。对于 $[0,1]$ 上划分 $\pi=\{0=x_0<x_1\cdots<x_n=1\}$,利用引理 2,有:$OSC(W,\Delta_I)\leqslant c$。再利用引理 1,

$$K(\Gamma_W)\leqslant 1+\lim_{\delta\to 0+}\inf_{|\pi|<\delta}\sum_{\pi}(W,\Delta_i)\leqslant 1+c<\infty$$

所以 $K-\dim\Gamma_W\leqslant 1$。

其次证明当 $\lambda>5$ 时,$K-\dim\Gamma_W\geqslant 1$。当 $\lambda>5>2$,令 $\delta<\lambda^{-1}$,则当 $|\pi|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\Delta_i|<\delta$,对 Δ_i 取整数 $N>0$,使

$$\lambda^{-N}\leqslant|\Delta_i|<\lambda^{-(N-1)}\tag{2}$$

取 $x=x_{i-1}\in\Delta_i$,存在 h 满足

$$\lambda^{-(N+1)}\leqslant h<\lambda^{-N}\tag{3}$$

且 $x+h\in\Delta_i$,记 $t=\lambda^N\pi x,\beta=\lambda^N\pi h$,由(3)式有:

$\frac{\pi}{\lambda}\leqslant\lambda^N\pi h=\beta\leqslant\pi$。由于 $\lambda>5>2$,所以存在 h,使得 $\frac{\pi}{2}\leqslant\beta\leqslant\pi$ 从而由引理 1,存在 $x,x+h\in\Delta_i$,使

$$|\sin(\lambda^N\pi(x+h))-\sin(\lambda^N\pi x)|=$$
$$|\sin(t+\beta)-\sin t|\geqslant\frac{1}{2}$$

由(2)式和(4)式知:存在 $x,x+h\in\Delta_i$,使

$$|W(x+h)-W(x)|\geqslant$$
$$\lambda^{-N}|\sin(\lambda^N\pi(x+h))-\sin(\lambda^N\pi x)|-$$
$$|W(x+h)-W(x)-\lambda^{-N}(\sin(\lambda^N(\pi+h))-\sin(\lambda^N\pi x))|\geqslant$$

$$\frac{1}{2}\lambda^{-N}-\frac{2}{\lambda-1}\geqslant\frac{1}{2}|\Delta_i|-\frac{2}{\lambda-1}=\frac{1}{2}|\Delta_i|-c$$

由于 $\lambda > s$, 所以 $\frac{1}{2}-c>0$, 所以

$$K(\Gamma_W)\geqslant\lim_{\delta\to 0+}\inf_{|\pi|<\delta}\sum_{\pi}OSC(W,\Delta_i)\geqslant$$

$$\lim_{\delta\to 0+}\inf_{|\pi|<\delta}\sum_{\pi}OSC(\frac{1}{2}|\Delta_i|-c)=$$

$$\frac{1}{2}-c=c'>0$$

所以 $K-\dim\Gamma_W\leqslant 1$。

综上所述,当 $\lambda>5$ 时, $K-\dim\Gamma_W=1$。

3 结束语

本文结合文献[5-7]得到了有关 Weierstrass 函数 $W(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{-i}\sin(\lambda^i\pi x),\lambda>1$ 在一定的条件下, $\dim_P\Gamma_W=K-\dim\Gamma_W=\dim_B\Gamma_W=\dim_H\Gamma_W=1$。

参考文献:

[1] Hu T Y,Lau K S.Fractal Dimensions and Singularities the Weiertrass Type Functions[J].Trans.Amer.Math. Soc,1993,335:649-665.

[2] 王世俊,于建辉.关于 Weierstrass 函数图像的 K-维数的简单证明[J].哈尔滨理工大学学报:自然科学版, 1994,4(2):91-94.

[3] 王世俊.关于 Weierstrass 函数图像的 K-维数的简单证明[J].福州大学学报:自然科学版,2000,30(4):448-451.

[4] 李红娟.一类广义 Weierstrass 型函数图像 K-维数的简单证明[J].太原理工大学学报:自然科学版,2011, 42(1):99-101.

[5] 何国龙.关于 Weierstrass 函数图像的 K-维数的简单证明[J].浙江师范大学学报:自然科学版,2003,26(4): 330-332.

[6] 文志英.分形几何的数学基础[M].上海:上海科技教育出版社,2000.

[7] 李本秀,魏毅强.一类 Weierstrass 函数图像的盒维数[J].太原科技大学学报:自然科学版,2010,31(4):314-316.

On K-dimention of a Weierstrass-type Function

HUANG Ming[1], *ZHANG Jing*[2], *LIU Hong-bo*[2], *ZHU Chun-mei*[3]

(1.Sichuan Technology and Business College, Dujiangyan 611830, China; 2.Sichuan Water Conservancy vocational College, Dujiangyan 611830, China; 3. Sichuan Fisheries School, Pixian 611731, China)

Abstract: Weierstrass function is everywhere continuous and nowhere differentiable. Its graph has fractal properties. Studying the graph of Weierstrass function plays an important role in fractal geometry. K-dimension is a fractal dimension between Hausdorff dimension and Box dimension. The K-dimension of graph of Weierstrass-type function was studied. It was proved that the K-dimension is equal to 1, and the relationship between Hausdorff dimension, Box dimension and K-dimension is progressively revealed.

Key words: Weierstrass function; K-dimention; graph