第 25 卷第 2 期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol. 25 No. 2
2012 年 4 月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Apr. 2012
文章编号:1673-1549(2012)02-0084-04

M-矩阵与其逆矩阵的 Hadamard 积最小特征值的新下界

刘 新, 杨晓英

(四川信息职业技术学院基础教育部, 四川 广元 628017)

摘 要: 关于 M-矩阵与其逆矩阵的 Hadamard 积 $A\circ A^{-1}$, 给出 $A\circ A^{-1}$ 的最小特征值下界的一些新的估计式,新下界估计式只依赖于矩阵的元素,易于计算。算例表明,新估计式有效地改进了 Fiedler 和 Markham 的猜想,也改进了其它已有的结果。

关键词: Hadamard 积; M-矩阵;最小特征值;逆矩阵;下界

中图分类号: O151.21 **文献标识码:** A

引 言

N 表示正整数集合; $R^{m\times n}$ ($C^{m\times n}$) 表示 $m\times n$ 阶实(复)矩阵; $\rho(P)$ 表示 $n\times n$ 阶非负矩阵 P 的 Perron 根。

定义 1[1] 设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, 且 $a_{ij}\leqslant 0, i\neq j$, 则称矩阵 A 为 Z 矩阵(简记为 $A\in Z^{n\times n}$)。

定义 2[1] 设 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$, 则 A 可以表示为 $A=\lambda I-B$, 其中 $B\geqslant 0$, 当 $\lambda\geqslant\rho(B)$ 时,则称 A 为 M-矩阵。特别地,当 $\lambda>\rho(B)$ 时,称 A 为非奇异 M-矩阵;当 $\lambda=\rho(B)$ 时,称 A 为奇异 M-矩阵。

定义 3[1] 对于 $A=(a_{ij})\in Z^{n\times n}$, 记 $\tau(A)=\min\{|\lambda|:\lambda\in\sigma(A)\}$, (其中 $\sigma(A)$ 表示矩阵 A 的谱), $\tau(A)$ 称为 A 的最小特征值。

定义 4[1] 设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}, B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$, 用 $A\circ B$ 表示 A 和 B 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 阶矩阵,即 $A\circ B=(a_{ij}b_{ij})\in C^{m\times n}$。$A\circ B$ 称为 A 和 B 的 Hadamard 积。

1988 年,Fiedler 和 Markham 在文献[2]中得出结论:如果 A 和 B 都是 M-矩阵,则 $A\circ B^{-1}$ 也是 M-矩阵,同时给出 $A\circ A^{-1}$ 的最小特征值 $\tau(A\circ A^{-1})$ 下界的估计式: $\tau(A\circ A^{-1})\geqslant\frac{1}{n}$, 同时给出了一个猜想:

$$\tau(A\circ A^{-1})\geqslant\frac{2}{n}$$

文献[3-6]分别证明了上述猜想的正确性。

Li Houbiao 等在文献[7]给出了下界

$$\tau(A\circ A^{-1})\geqslant\min_i\left\{\frac{a_{ii}-s_iR_i}{1+\sum\limits_{j\neq i}s}\right\}$$

2009 年, Li Yang*tang* 等在文献[8]中改进了 Li Houbiao 的结果,得到关于 $A\circ A^{-1}$ 的最小特征值下界的新估计式:

$$\tau(A\circ A^{-1})\geqslant\min_i\left\{\frac{a_{ii}-m_iR_i}{1+\sum\limits_{j\neq i}m_{ji}}\right\}$$

同年,李艳艳在文献[9]中给出了估计式:

$$\tau(A\circ A^{-1})\geqslant\min_i\left\{\frac{a_{ii}-t_iR_i}{1+\sum\limits_{j\neq i}t_{ji}}\right\}$$

其中 $d_i=\frac{\sum\limits_{k\neq i}|a_{ik}|}{|a_{ii}|}, t_{ji}=\frac{\sum\limits_{k\neq j}|a_{jk}|d_k}{|a_{jj}|}, t_i=\max\limits_{j\neq i}\{t_{ij}\}, i\in N$。

本文将给出 $A\circ A^{-1}$ 最小特征值的一些新的下界估计式,这些新下界改进了文献[2,7-8,10]中的相应结果。

1 符号与引理

首先,给出一些记号,它们会在后面的讨论中用到。记:

$$R_i=\sum_{k\neq i}|a_{ik}|, C_i=\sum_{k\neq i}|a_{ki}|$$

收稿日期: 2011-12-10

作者简介: 刘 新(1983-),男,山东济宁人,助教,硕士,主要从事矩阵理论方面的研究,(E-mail)liuxin01668@163.com

$$d_i = \frac{R_i}{|a_{ii}|}, \hat{c}_i = \frac{C_i}{|a_{ii}|}$$

$$r_{li} = \frac{|a_{li}|}{|a_{ll}| - \sum_{k \neq l,i} |a_{lk}|}, l \neq i$$

$$r_i = \max_{l \neq i} \{r_{li}\}, i \in N$$

$$c_{il} = \frac{|a_{il}|}{|a_{ll}| - \sum_{k \neq l,i} |a_{kl}|}, l \neq i$$

$$c_i = \max_{l \neq i} \{c_{il}\}, i \in N$$

$$m_{ji} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{jk}| r_i}{|a_{jj}|}, j \neq i$$

$$m_i = \max_{j \neq i} \{m_{ij}\}, i \in N$$

$$n_{ji} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{jk}| r_k}{|a_{jj}|}, j \neq i$$

$$n_i = \max_{j \neq i} \{n_{ij}\}, i \in N$$

$$s_{ji} = \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{jk}| d_k}{|a_{jj}|}, j \neq i$$

$$s_i = \max_{j \neq i} \{s_{ij}\}, i \in N$$

引理 1[7]　(a) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵, $A^{-1} = (b_{ij})$。则

$$|b_{ji}| \leqslant \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{jk}| d_k}{|a_{jj}|} |b_{ii}|, j \neq i$$

(b) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是列严格对角占优 M- 矩阵, $A^{-1} = (b_{ij})$。则

$$|b_{ij}| \leqslant \frac{|a_{ij}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{kj}| \hat{c}_k}{|a_{jj}|} |b_{ii}|, j \neq i$$

引理 2[8]　(a) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵, $A^{-1} = (b_{ij})$。则

$$b_{ji} \leqslant \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{jk}| r_i}{a_{jj}} b_{ii}, j \neq i$$

(b) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是列严格对角占优 M- 矩阵, $A^{-1} = (b_{ij})$。则

$$b_{ij} \leqslant \frac{|a_{ij}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{kj}| c_i}{a_{jj}} b_{ii}, j \neq i$$

引理 3[11]　(a) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵, $A^{-1} = (b_{ij})$。则

$$b_{ji} \leqslant \frac{|a_{ji}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{jk}| r_k}{a_{jj}} b_{ii}, j \neq i$$

(b) 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是列严格对角占优 M- 矩阵, $A^{-1} = (b_{ij})$。则

$$b_{ij} \leqslant \frac{|a_{ij}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{kj}| c_k}{a_{jj}} b_{ii}, j \neq i$$

引理 4[7]　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是 M- 矩阵, $A^{-1} = (b_{ij})$ 是双随机矩阵。则

$$b_{ii} \geqslant \frac{1}{1 + \sum_{j \neq i} s_{ji}}, i \in N$$

引理 5[8]　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是行严格对角占优 M- 矩阵, $A^{-1} = (b_{ij})$。则

$$\frac{1}{a} \leqslant b_{ii}, i \in N$$

引理 6[4]　设 A^{-1} 是双随机矩阵,则 $Ae = e$, $A^T e = e$, 其中, $e = (1, 1, \cdots, 1)^T$。

引理 7[12]　设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是任意复矩阵, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是正实数。则 A 的所有特征值都位于复平面的下列区域之中

$$\cup \left\{ z \in C: |z - a_{ii}| \leqslant x_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_j} |a_{ji}|, i \in N \right\}$$

引理 8[1]　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是 M- 矩阵,则存在正对角矩阵 $D \in R^{n \times n}$, 使得 $D^{-1}AD$ 为行严格对角占优 M- 矩阵。

2　主要结果

定理 1　设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是不可约 M- 矩阵, $A^{-1} = (b_{ij})$ 是双随机矩阵。则

$$\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant \min_i \left\{ \frac{a_{ii} - m_i \sum_{j \neq i} \frac{|a_{ji}| n_{ji}}{m_j}}{1 + \sum_{j \neq i} s_{ji}} \right\}$$

证明　因为 A 是不可约矩阵, A^{-1} 是双随机矩阵,由引理 6 知, $a_{ii} = \sum_{k \neq i} |a_{ik}| + 1 = \sum_{k \neq i} |a_{ki}| + 1$, 且 $a_{ii} > 1$, $i \in N$。令 $R_j^r = \sum_{k \neq j} |a_{jk}| r_i$, $j \in N$, 则

$$R_j^r \leqslant |a_{ji}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{jk}| r_i \leqslant R_j = \sum_{k \neq j} |a_{jk}|$$

因此,存在实数 $\varphi_{ji} (0 \leqslant \varphi_{ji} \leqslant 1)$, 使得

$$|a_{ji}| + \sum_{k \neq j,i} |a_{jk}| r_i = \varphi_{ji} R_j + (1 - \varphi_{ji}) R_j^r$$

令 $\varphi_j = \max_{i \neq j} \{\varphi_{ji}\}$, 则 $0 < \varphi_j \leqslant 1$ (当 $\varphi_j = 0$ 时, A 是可约的矩阵,与 A 不可约相矛盾),且

$$m_j = \max_{i \neq j} \{m_{ji}\} = \frac{\varphi_j R_j + (1 - \varphi_j) R_j^r}{a_{jj}}, j \in N$$

显然,$0 < m_j \leqslant 1$。令 $\lambda = \tau(A \circ A^{-1})$,由引理 7 知,存在 $i_0(1 \leqslant i_0 \leqslant n)$,使得

$$|\lambda - a_{i_0i_0}b_{i_0i_0}| \leqslant m_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{m_j}|a_{ji_0}b_{ji_0}|$$

故

$$|\lambda| \geqslant a_{i_0i_0}b_{i_0i_0} - m_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{m_j}|a_{ji_0}b_{ji_0}| \geqslant$$

$$a_{i_0i_0}b_{i_0i_0} - m_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{|a_{ji_0}|}{m_j}\frac{|a_{ji_0}| + \sum\limits_{k\neq j,i_0}|a_{jk}|r_k}{a_{jj}}b_{i_0i_0} =$$

$$(a_{i_0i_0} - m_{i_0}\sum_{j\neq i_0}\frac{1}{m_j}|a_{ji_0}|n_{ji_0})b_{i_0i_0} \geqslant$$

$$\frac{a_{i_0i_0} - m_{i_0}\sum\limits_{j\neq i_0}\frac{1}{m_j}|a_{ji_0}|n_{ji_0}}{1 + \sum\limits_{j\neq i_0}s_{ji_0}} \geqslant$$

$$\min_i\left\{\frac{a_{ii} - m_i\sum\limits_{j\neq i}\frac{|a_{ji}|n_{ji}}{m_j}}{1 + \sum\limits_{j\neq i}s_{ji}}\right\}$$

注: 若 A 是可约的。不失一般性,假设 A 是具有不可约对角块 A_{ii} ($i = 1,2,\cdots,k$)的块上三角矩阵:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & A_{kk} \end{bmatrix}$$

则 A^{-1} 仍是块上三角矩阵,且

$$\tau(A \circ A^{-1}) = \min_k \tau(A_{kk} \circ A_{kk}^{-1})$$

结论仍然成立。

由引理 5,引理 8 和定理 1,可以得出下面的结论。

推论 1 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n\times n}$ 是 M-矩阵,$A^{-1} = (b_{ij})$。则

$$\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant \min_i\left\{\frac{a_{ii} - m_i\sum\limits_{j\neq i}\frac{|a_{ji}|n_{ji}}{m_j}}{a_{ii}}\right\}$$

3 例 子

例 1[7] 设

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

易知 A 是 M-矩阵,$Ae = e$, $A^Te = e$,其中,$e = (1,1,\cdots,1)^T$,因此 A^{-1} 是双随机矩阵。通过 Matlab 计算得

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2333 & 0.3667 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1667 & 0.2333 & 0.4 & 0.2 \\ 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.4 \end{bmatrix}$$

对 $\tau(A \circ A^{-1})$ 的下界进行估计,依据 Fiedler 和 Markham 的猜想:

$$\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant \frac{2}{n} = \frac{1}{2}$$

依据文献[7]定理 3.1 的结论,得:

$$\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant 0.6624$$

依据文献[8]定理 3.2 的结论,得:

$$\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant 0.7999$$

由本文的定理 1 得:

$$\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant 0.8234$$

而 $\tau(A \circ A^{-1})$ 的真值是

$$\tau(A \circ A^{-1}) = 0.9756$$

由以上的数值结果知,定理 1 有效地改进了 Fiedler 和 Markham 的猜想 $\tau(A \circ A^{-1}) \geqslant \frac{2}{n}$ 和文献[7-8]中的结果。

参 考 文 献:

[1] 陈景良,陈向晖.特殊矩阵[M].北京:清华大学出版社,2000.

[2] Fiedler M,Markham T.An inequality for the Hadamard product of an M-matrix and inverse M-matrix[J].Linear Algebra Appl,1988,101:1-8.

[3] Yong Xuerong. Proof of a conjecture of Fiedler and Markham[J].Linear Algebra Appl,2000,320:167-171.

[4] Yong Xuerong,Wang Zheng.On a conjecture of Fiedler and Markham[J]. Linear Algebra Appl,1999,288:259-267.

[5] Song Yongzhong. On an inequality for the Hadamard product of an M-matrix and its inverse [J]. Linear Algebra Appl,2000,305:99-105.

[6] Chen Shencan. A lower bound for the minimum eigenvalue of the Hadamard product of matrices[J]. Linear Algebra Appl,2004,378:159-166.

[7] LI Houbiao, Hung Tingzhu, Shen Shuqian, et al. Lower bounds for the minimum eigenvalue of Hadamard

product of an M-matrix and its inverse [J]. Linear Algebra Appl,2007,420:235-247.

[8] LI Yaotang, Cheng Fubin, Wang Defeng. New lower bounds on eigenvalue of the Hadamard product of an M-matrix and its inverse[J].Linear Algebra Appl,2009, 430:1423-1431.

[9] 李艳艳.M 矩阵与其逆矩阵的 Hadamard 积最小特征值下界的研究[J].四川理工学院学报:自然科学版,2009,22(3):15-17.

[10] 周 平,赵 慧.M-矩阵与 M-矩阵的逆的 Hadamard 积的最小特征值下界的估计[J].四川理工学院学报:自然科学版,2011,29(6):729-732.

[11] LI Yaotang, LI Yanyan,Wang Ruiwu,et al.Some new bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J].Linear Algebra Appl, 2010,432:536-545.

[12] Vargar S.Minimal Gerschgorin sets[J].Pacific J.Math, 1965,15(2):719-729.

New Lower Bounds for the Minimum Eigenvalue of the Hadamard Product of the *M* -matrix and Its Inverse Matrix

LIU Xin, *YANG Xiao-ying*

(Ministry of Basic Education, Sichuan Information Technology College, Guangyuan 628017, China)

Abstract: For the Hadamard product $A \circ A^{-1}$ of an M-matrix and its inverse matrix, some new lower bounds for the minimum eigenvalue of $A \circ A^{-1}$ are given. The new estimating formulas of the lower bounds which only depend on the entries of *M* -matrix are easier to calculate. Numerical example shows that the new estimating formulas improve the Conjecture of Fiedler and Markham effectively,and also improve the other results in the literature.

Key words: Hadamard product; *M* -matrix; minimum eigenvalue; inverse matrix; lower bounds