文章编号:1673-1549(2012)02-0081-03

一类非线性金融系统的 hopf 分岔研究

张荣艳

(黄河科技学院信息工程学院,郑州 450063)

摘　要:研究了一类非线性金融系统。首先利用特征方程和 Routh Hurwitz 准则对系统的平衡点的稳定性和 hopf 分岔的存在性进行了研究;其次利用解析法研究了系统 hopf 的分岔方向和分岔稳定性;最后证明了在一定条件下,系统的 hopf 分岔是亚临界的。

关键词:金融系统;非线性;稳定性;hopf 分岔

中图分类号:O175　　**文献标识码**:A

引　言

经济学中的分岔和混沌现象自 1985 年被首次发现以来,对当今西方主流经济学派产生了巨大的冲击,因为经济系统中出现混沌现象意味着宏观经济运动本身具有内在的不稳定性。政府虽然可以采取诸如财经政策或金融政策等宏观调控手段来进行干预,但是干预的有效性是十分有限的,不稳定性和复杂性使精确的经济预测受到很大限制,合理的预期行为也变得复杂起来。因此,有必要系统地开展对这类复杂经济系统内在结构特征的研究。通过研究系统的周期解的失稳、分岔、倍周期分岔、分岔点值的位置、复杂系统进人混沌的道路,从而揭示复杂现象发生的原因,就变得越来越重要,并可在此基础上,为对复杂连续经济系统的分析、预测与控制提供理论依据和实际操作的方法[1]。

文献[2]了给出了一类金融系统

$$\begin{cases}\bar{x} = z + (y - a)\\ \bar{y} = 1 - by - x^2\\ \bar{z} = -x - cz\end{cases}\tag{1}$$

其中 x 表示利率,y 表示投资需求,z 表示价格指数,$a \geqslant 0$ 为储蓄量,$b \geqslant 0$ 为单位投资成本,$c \geqslant 0$ 为商品需求弹性。文献[1,3-4]分别对系统进行了分岔、混沌和控制进行了系统的研究。

通过选择适当的坐标系和变量替换,系统(1)可以简化为[5]

$$\begin{cases}\bar{x} = -a(x + y)\\ \bar{y} = -y - axz\\ \bar{z} = b + axy\end{cases}\tag{2}$$

其中 a,b 是大于零的参数。

首先对系统(2)的平衡点的稳定性和 hopf 分岔的存在进行了分析;其次对系统分岔方向和分岔稳定性进行了分析;最后证明了在一定条件下,系统的 hopf 分岔是非退化的亚临界分岔。

1　平衡点的稳定性与 hopf 分岔

系统(2)有两个平衡点:

$$S_1 = \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a}\right)$$

$$S_2 = \left(-\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a}\right)$$

系统(2)在平衡点 S_1, S_2 处的线性化特征方程均为:

$$\lambda^3 + (1 + a)\lambda^2 + ab\lambda + 2a^2b = 0\tag{3}$$

根据 Routh hurwitz 准则可得下面结论。

定理 1　平衡点

$$S_1 = \left(\frac{\sqrt{ab}}{a}, -\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a}\right)$$

$$S_2 = \left(-\frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{\sqrt{ab}}{a}, \frac{1}{a}\right)$$

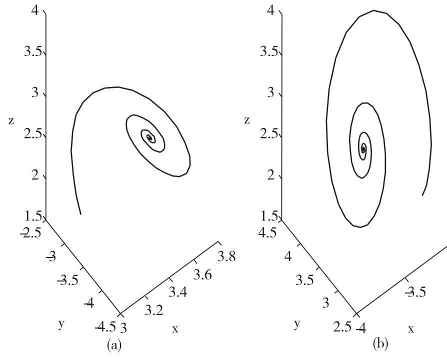
稳定的充分必要条件是 $a < 1$(图 1)。

当 $a = 1$ 时,特征方程变为:

收稿日期:2012-02-23

基金项目:黄河科技学院自然科学基金项目(KYZR201115)

作者简介:张荣艳(1982-),女,河南郑州人,讲师,硕士,主要从事分岔控制、模糊控制方面的研究,(E-mail)hebgydx2006@163.com



(a)平衡点 S_1 稳定　(b)平衡点 S_2 稳定

图1　a=0.4<1,b=5 不动点稳定图

$$\lambda^3+2\lambda^2+b\lambda+2b=0$$

其特征值分别为:

$$\lambda_1=\sqrt{b}i,\lambda_2=-\sqrt{b}i,\lambda_3=-2$$

即当 $a=1$,特征方程(3)有一个负实根和一对纯虚根,并且

$$\lambda'(a)=\frac{-\lambda^2-b\lambda-4ab}{3\lambda^2+2(1+a)\lambda+ab}$$

则

$$\mathrm{Re}(\lambda'(a=1))=\frac{5b}{2b+8}>0$$

于是由 Hopf 分岔定理[6]得下面结论。

定理2　当 $a=1$,系统(2)在平衡点 S_1 和平衡点 S_2 处均产生 hopf 分岔(图2)。

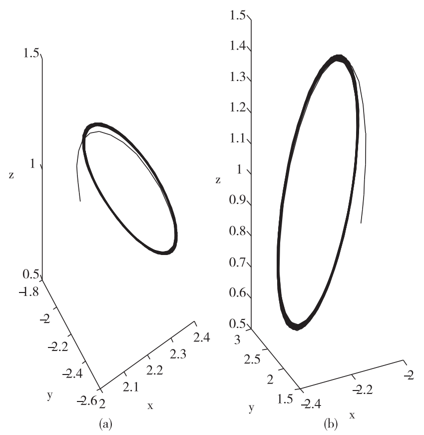


图2　a=1,b=5 hopf 分岔图

2　hopf 分岔的方向和稳定性

利用解析方法,对系统(2)在平衡点附近的 hopf 分岔方向和分岔稳定性进行研究。因为平衡点 S_1 和平衡点 S_2 的对称性,仅分析平衡点 S_1 的情况。

对系统(2)做变量替换,设

$$u=x-\frac{\sqrt{ab}}{a},v=y+\frac{\sqrt{ab}}{a},w=z-\frac{1}{a}$$

则系统(2)变为

$$\begin{cases}\bar{u}=-a(u+v)\\ \bar{v}=-u-v-\sqrt{ab}w-auw\\ \bar{w}=-\sqrt{ab}u+\sqrt{ab}v+auv\end{cases}\tag{4}$$

系统(2)在平衡点 S_1 变成了系统(4)的零平衡点 $S_0(0,0,0)$。

一直假设 $a=1$。系统(4)可以写成:

$$\bar{U}=AU+F(U),U\in R^3$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}-1&-1&0\\-1&-1&-\sqrt{b}\\-\sqrt{b}&\sqrt{b}&0\end{pmatrix},U=\begin{pmatrix}u\\v\\w\end{pmatrix}$$

$$F(U)=\frac{1}{2}B(U,U)+\frac{1}{6}C(U,U,U)$$

$$B(U,U)=(0,-2uw,2uv)^T$$

$$C(U,U,U)=(0,0,0)^T$$

矩阵 A 的特征方程为:

$$\lambda^3+2\lambda^2+b\lambda+2b=0$$

其特征值为:$\lambda_1=\sqrt{b}i,\lambda_2=-\sqrt{b}i,\lambda_3=-2$,复特征值 $\lambda_1=\sqrt{b}i,\lambda_2=-\sqrt{b}i$ 对应着一对共轭的复特征向量为:

$$q=(1,-1-\sqrt{b}i,-\sqrt{b}+2i)^T$$

$$\bar{q}=(1,-1+\sqrt{b}i,-\sqrt{b}-2i)^T$$

即

$$Aq=\sqrt{b}iq,A\bar{q}=-\sqrt{b}i\bar{q}$$

同时,引进一个伴随向量 $p\in C^3$,其满足条件:

$$A^Tp=-\sqrt{b}ip,A^T\bar{p}=\sqrt{b}i\bar{p}$$

通过计算可得 $p=(1,-1,i)^T$。规范化 p 使得 $\langle p,q\rangle=1$,其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 C^3 中的一个标量积,定义为

$$\langle p,q\rangle=\sum_{i=1}^{3}\bar{p}_iq_i$$

通过计算,可以得到规范化后的伴随向量 p

$$p=\frac{1}{4+2\sqrt{b}i}(1,-1,i)^T$$

根据文献[7],系统(4)在原点 $S_0(0,0,0)$ 的第一 Lyapunov 系数为

$$l_1(0)=\frac{1}{2\sqrt{b}}\mathrm{Re}[\langle p,C(q,q,\bar{q})\rangle-2\langle p,B(q,A^{-1}B(q,\bar{q}))\rangle+\langle p,B(\bar{q},(2i\sqrt{b}E-A)^{-1}B(q,q))\rangle]=\frac{2}{\sqrt{b}}(\frac{3}{4+b}+\frac{2+b}{3b^2+15b+12})>0$$

其中

$$B(q,q)=(0,2(\sqrt{b}-2i),-2(1+\sqrt{b}i))^T$$

$$B(q,\bar{q})=(0,2\sqrt{b},-2)^T$$

$$A^{-1}B(q,\bar{q})=(\frac{1}{\sqrt{b}},-\frac{1}{\sqrt{b}},-2)^T$$

$$B(q,A^{-1}B(q,\bar{q}))=(0,3-\frac{2}{\sqrt{b}}i,-\frac{2}{\sqrt{b}}-i)^T$$

$$(2i\sqrt{b}E-A)^{-1}B(q,q)=$$
$$(\frac{-3\sqrt{b}+bi}{3b(1+\sqrt{b}i)},\frac{(2b+3)\sqrt{b}+5bi}{3b(1+\sqrt{b}i)},\frac{2}{3})^T$$

$$B(\bar{q},(2i\sqrt{b}E-A)^{-1}B(q,q))=$$
$$(0,\frac{-7b-(6+b)\sqrt{b}i}{3b(1+\sqrt{b}i)},\frac{(6+b)\sqrt{b}+bi}{3b(1+\sqrt{b}i)})^T$$

$$C(q,q,\bar{q})=(0,0,0)^T$$

$$<p,C(q,q,\bar{q})>=0$$

$$<p,B(q,A^{-1}B(q,\bar{q}))>=\frac{-2\sqrt{b}+2i}{2\sqrt{b}-bi}$$

$$<p,B(\bar{q},(2i\sqrt{b}E-A)^{-1}B(q,q))>=$$
$$\frac{4}{3(2+b+\sqrt{b}i)}$$

由第一 Lyapunov 系数 $l_1(0)>0$, 可以得出下述结论:

定理 3　系统(2)的 hopf 分岔是非退化的亚临界分岔,从平衡点 S_1 处分岔出一个不稳定的周期轨迹。

对于亚临界分岔点 $a_0=1$, 当 $a<1$ 时,存在两个由初始条件决定的不同运动轨迹:

(1)初始值与平衡点 S_1 的距离较小时,平衡点 S_1 局部渐近稳定。

(2)与平衡点 S_1 的距离较大时,轨迹将远离周期轨迹,导致系统的不稳定。

当 $a>1$ 时,系统的平衡点 S_1 不稳定,最终产生混沌(图 3,初始值 $x=0.1,y_0=-0.1,z_0=0.1$)。

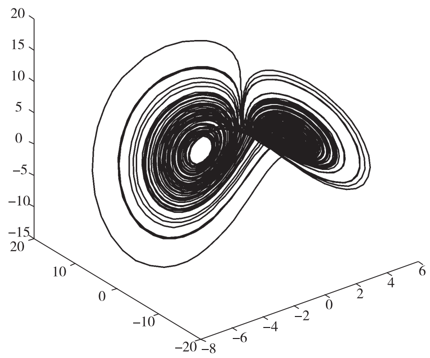


图 3　a=1.1,b=5 混沌图

3　结束语

利用特征方程和 Routh Hurwitz 准则对系统平衡点的稳定性进行了研究,并且证明了系统存在 hopf 分岔;利用解析法证明了在一定条件下,系统的 hopf 分岔是亚临界分岔。系统还有很多的性质有待进一步的研究分析,例如系统的混沌研究。

参 考 文 献:

[1] 马海军,陈予恕.一类金融系统分岔混沌拓扑结构与全局复杂性研究(I)[J].应用数学与力学,2001,22(11):1119-1128.

[2] 黄登仕,李后强.非线性经济学理论和方法[M].成都:四川大学出版社,1993.

[3] Wei Chingchen. Nonlinear dynamics and chaos in a fractional-order nancial system[J]. Chaos, Solitons and Fractals,2008,36:1305-1314.

[4] Sun Mei, Zeng Changyan, Ling Li. Chaos Control and Chaotication for a Three-dimensional Autonomous System[J]. International Journal of Nonlinear Science, 2009,7(2):220-225.

[5] Ding Juan,Yang Weiguo,Yao Hongxing. A New Modied Hyperchaotic Finance System and its Control [J]. International Journal of Nonlinear Science,2009,8(1):59-66.

[6] Wiggings S. Introduction to applied nonlinear dynamical system and chaos,2nd edition[M]. New York:Springger-Verlag,2003.

[7] Kuznetsov Y A. Elements of applied bifurcation theory [M]. New York:Springger-Verlag,1998.

Study on the Hopf Bifurcation of a Kind of Non-linear Finance System

ZHANG Rong-yan

(Information Enginearing School, Huanghe Science and Technology College, Zhengzhou 450063, China)

Abstract: A kind of non-linear finance system is studied. First, the stability of the equilibrium and the existence of the hopf bifurcation of the system are studied by analyzing the characteristic equation and Routh Hurwitz criterion; second, the direction and stability of the bifurcation is investigated by using analytical method; finally, the non-linear finance system is proved to be a subcritical hopf bifurcation under certain conditions.

Key words: finance system; nonlinearity; stability; hopf bifurcation