第 25 卷第 2 期　　四川理工学院学报(自然科学版)　　Vol. 25　No. 2
2012 年 4 月　　Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition)　　Apr. 2012
文章编号:1673-1549(2012)02-0074-03

随机环境中马氏链的特征数与禁止概率

崔 静

(安徽师范大学数学计算机科学学院, 安徽 芜湖 241000)

摘　要:利用马氏链的一般理论讨论了随机环境中马氏链的特征数和禁止概率的关系,给出了强常返状态特征数的分解公式,利用禁止概率的一般分解公式研究了分布矩的性质,丰富了现有文献中的随机环境中马氏链的相关结果。

关键词:随机环境中马氏链;禁止概率;强常返;特征数

中图分类号:O211.62　　**文献标识码:**A

马氏过程是随机过程中最重要的一类随机过程,有着极其深厚的理论基础和应用背景。随着研究的深入,美国数学家 W. Smith 在研究分枝过程时提出要充分考虑环境的影响,事实上,随机环境模型在自然科学和社会经济生活等领域有着广泛的应用,例如物理学上多晶固体中的扩散、生物学中用来描述物种群体的繁衍过程等。随机环境中马氏链的一般框架是由 Cogburn 等人[1-4]在上世纪七八十年代建立的,随后,Orey 在其特邀论文[5]中评价了 Cogburn 等人的工作,给出了一些新的结果并提出了一系列开问题,LI Ying qiu[6-7]研究了双无限随机环境中马氏链的不变测度,肖争艳和胡迪鹤[8]给出了绕积马氏链的定义并使用绕积马氏链的特征数研究了随机环境中马氏链的各种状态间的关系。本文利用随机环境中马氏链的禁止概率的基本分解公式[9]讨论了随机环境中马氏链的各种状态之间的关系,给出了特征数的分解公式和首达分布的若干性质,丰富了现有文献的结论。

1　预备知识

设 (Θ,B) 是任一可测空间, X 是至多可数集, A 是其上的离散 σ-代数。(Ω,F,P) 为一概率空间, $\overrightarrow{X_0^\infty}=(X_n)_{n\geqslant 0}$ 和 $\vec{\xi}=(\xi_n)_{n\in Z}$ 是 (Ω,F,P) 上分别取值于 X 和 Θ 的随机序列。$\{P(\theta),\theta\in\Theta\}$ 是 (X,A) 上的一族转移函数族。若对几乎所有的 $A\in A,\vec{\xi}=(\xi_n)_{n\in Z}$ 和 $\overrightarrow{X_0^\infty}=(X_n)_{n\geqslant 0}$ 满足

$$P(X_0\in A|\vec{\xi})=P(X_0\in A|\vec{\xi^0})$$

$$P(X_{n+1}\in A|\overrightarrow{X_0^n},\vec{\xi})=P(\xi_n,X_n,A)$$

则称 $\vec{X}$ 为随机环境 $\vec{\xi}$ 中的马氏链(记为 MCRE),称 $\vec{\xi}$ 为环境序列, X 是状态空间, Θ 为环境空间。显然,当 $\vec{\xi}=\vec{\theta}$ 时, $(X_n)_{n\geqslant 0}$ 是一非时齐的马氏链,其第 n 步转移概率为 $P(\theta_n)$。

设 Z 为整数集, $\Theta_n:\Theta^z\to\Theta,n\in Z$ 为坐标函数,令 $B_k^l=\sigma(\Theta_n,k-1<n<l+1)$, 其中 $-\infty\leqslant k\leqslant l\leqslant+\infty$。设 T 为推移算子, π 是可测空间 (Θ^z,B^z) 上的任意概率测度且满足 $\pi T^{-1}=\pi$, 即 $(T\vec{\theta})_n=\theta_{n+1},\vec{\theta}\in\vec{\Theta}$, 于是 θ_n 是取值于 Θ 的严平稳序列。对 $\vec{\theta}=(\theta_n,n\in Z)\in\Theta^z$, 记

$$P(\theta_m,\cdots,\theta_n)=P(\theta_m)\cdots P(\theta_n),\ -\infty<m\leqslant n<+\infty$$

记 $E=X\times\Theta^z,\Xi=A\times B^z,\mu=k\times\pi$, 其中 k 为 X 上的计数测度。对 $F\in\Xi$, 令 τ_F 表示状态首次到达集合 F 的时间,为行文方便,令

$$F^n(\vec{\theta};x,F)=P_{(x,\vec{\theta})}(\tau_F=n)$$

$$[F]_x=\{(x,\vec{\theta}):\vec{\theta}\in(F)_x\}$$

$$L(x,\vec{\theta};F)=P_{(x,\vec{\theta})}(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{(X_n,T^n\vec{\theta})\}\in F)$$

收稿日期:2012-02-07

基金项目:安徽省教育厅自然科学基金项目(KJ2011z147)

作者简介:崔 静(1982-),女,安徽灵璧人,讲师,博士生,主要从事随机环境中的马氏链方面的研究,(E-mail)jcui123@126.com

$$Q(x,\overrightarrow{\theta};F) = P_{\overrightarrow{(x,\theta)}}\Big(\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=k}^{\infty}\{(X_n, T^n\overrightarrow{\theta})\} \in F\Big)$$

$${}_HP(\overrightarrow{\theta};x,y) = P_{\overrightarrow{(x,\theta)}}(X_n = y, X_k \notin H, 1 < k < n)$$

$H \subseteq X$ 称为禁止集。特别地,当 $H = \{z\}$ 时,记

$${}_HP(\overrightarrow{\theta};x,y) = {}_zP(\overrightarrow{\theta};x,y)$$

$$L_{\inf}(\overrightarrow{\theta};x,y) = \inf_k L(T^k\overrightarrow{\theta};x,y)$$

$${}_HL(\overrightarrow{\theta};x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_HF(\overrightarrow{\theta};x,y)$$

$$m^r(\overrightarrow{\theta};x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r F^n(\overrightarrow{\theta};x,y)$$

$$m^r_{\sup}(\overrightarrow{\theta};x,y) = \sup_k m^r(T^k\overrightarrow{\theta};x,y)$$

称 $m^r(\overrightarrow{\theta};x,y) = ET_y^r, r \in N$ 为首达状态 y 的 r 阶矩,其中 $T_y = T_{\{y\}}$ 为首达状态 y 的时刻。

定义 1 若 $\pi(\overrightarrow{\theta}: Q(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) = 1) = 1$, 则称状态 x 是强常返的;若 $\pi(\overrightarrow{\theta}: G(x,\overrightarrow{\theta};[E]_x) = \infty) = 1$, 则称状态 x 是弱常返的。

定义 2 称集合 $A \in \Xi$ 可达集合 $D \in \Xi$, 若 $L(x,\overrightarrow{\theta};D) > 0$ *a. e.* $(x,\overrightarrow{\theta}) \in A$;称状态 x 可达 y, 如果 $[E]_x$ 可达 $[E]_y$。

2 主要结果及证明

引理 1[9] 若 $n \geqslant 2, z \notin H$, 则

$${}_HP(\overrightarrow{\theta};x,y) = {}_{z,H}P(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{n-1} {}_{z,H}P(\overrightarrow{\theta};x,z)\,{}_HP(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) \tag{1}$$

$${}_HP(\overrightarrow{\theta};x,y) = {}_{z,H}P(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{n-1} {}_HP(\overrightarrow{\theta};x,z)\,{}_{z,H}P(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) \tag{2}$$

引理 2[8] 若 x 是强常返的 x 且可达 y, 则 $\pi\{\overrightarrow{\theta}; L(y,\overrightarrow{\theta};[E]_x) = 1\} = 1$。

引理 3[10-11] 若存在 $r \geqslant 1$ 使得 $m^r(\overrightarrow{\theta};x,y) < \infty$,*a. e.* , 则

$$\lim_{z\to\infty} {}_zm(\overrightarrow{\theta};x,y) = m^r(\overrightarrow{\theta};x,y), a.e.$$

定理 1 若 y 是强常返的且 y 可达 z, 则对任意的 $x \in X$, 都有

$$L(\overrightarrow{\theta};x,y) = {}_yL(\overrightarrow{\theta};x,z) + {}_zL(\overrightarrow{\theta};x,y)$$

证明 在(1)式中令 $H = \{y\}$ 得

$$F^n(\overrightarrow{\theta};x,y) = {}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{n-1} {}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)F^{n-v}(T^v\overrightarrow{\theta};z,y)$$

在式两边对 n 求和有

$$\sum_{n=1}^{\infty} F^n(\overrightarrow{\theta};x,y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{n-1} {}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)F^{n-v}(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{\infty}\sum_{n=v+1}^{\infty} {}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)F^{n-v}(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} {}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)F^{n}(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} {}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{\infty} {}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)L(T^v\overrightarrow{\theta};z,y)$$

注意到 y 是强常返的且 y 可达 z, 由引理 2 知 $\pi\{\overrightarrow{\theta}; L(\overrightarrow{\theta};z,y) = 1\} = 1$, 故

$$\sum_{n=1}^{\infty} F^n(\overrightarrow{\theta};x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} {}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{\infty} {}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)$$

定理 1 得证。

定理 2 若存在 $r \geqslant 1$ 使得 $m^r(\overrightarrow{\theta};x,z) < \infty$, *a. e.* 且 $m^r_{\sup}(\overrightarrow{\theta};z,y) < \infty$,*a. e.* , 则 $m^r(\overrightarrow{\theta};x,y) < \infty$, *a. e.* 。

证明 由定理 1 的证明易知

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r F^n(\overrightarrow{\theta};x,y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r{}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{v=1}^{n-1} n^r{}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)F^{n-v}(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r{}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{\infty}\sum_{n=v+1}^{\infty} n^r{}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)F^{n-v}(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) =$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r{}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (m+v)^r{}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)F^{n}(T^v\overrightarrow{\theta};z,y)$$

注意到 $(m+v)^r \leqslant 2^r(m^r + v^r)$, 进而

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r F^n(\overrightarrow{\theta};x,y) - \sum_{n=1}^{\infty} n^r{}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) \leqslant$$

$$2^r\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(m^r + v^r){}_yF(\overrightarrow{\theta};x,z)F^m(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) \leqslant$$

$$2^r\sum_{v=1}^{\infty} F^v(\overrightarrow{\theta};x,z)m^r(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) +$$

$$2^r\sum_{v=1}^{\infty} F^v(\overrightarrow{\theta};x,z)v^rL(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) \leqslant$$

$$2^r[m^r_{\sup}(\overrightarrow{\theta};z,y) + m^r(\overrightarrow{\theta};x,z)]$$

即

$$m^r(\overrightarrow{\theta};x,y) - {}_zm(\overrightarrow{\theta};x,y) \leqslant 2^r[m^r_{\sup}(\overrightarrow{\theta};z,y) + m^r(\overrightarrow{\theta};x,z)]$$

故当 $m^r(\overrightarrow{\theta};x,z) < \infty$ 且 $m^r_{\sup}(\overrightarrow{\theta};z,y) < \infty$ 时,必有 $m^r(\overrightarrow{\theta};x,y) < \infty$, 证毕。

推论 1 若存在 $r \geqslant 1$ 使得 $m^r(\overrightarrow{\theta};x,z) < \infty$, *a. e.* , 则

$$\lim_{z\to\infty} {}_ym(\overrightarrow{\theta};x,z)L_{\inf}(\overrightarrow{\theta};z,y) = 0.\ a.e.$$

证明 由定理 2 的证明易知

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^r F^n(\overrightarrow{\theta};x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} n^r{}_zF(\overrightarrow{\theta};x,y) +$$

$$\sum_{v=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(m+v)_y^r F(\overrightarrow{\theta};x,z)F^m(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) \geqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n_z^r F(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} v_y^r F(\overrightarrow{\theta};x,z)F^m(T^v\overrightarrow{\theta};z,y) \geqslant$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n_z^r F(\overrightarrow{\theta};x,y) + \sum_{v=1}^{\infty} v_y^r F(\overrightarrow{\theta};x,z)L_{\inf}(\overrightarrow{\theta};z,y)$$

即

$$m^r(\overrightarrow{\theta};x,y) \geqslant {}_z m(\overrightarrow{\theta};x,y) + {}_y m(\overrightarrow{\theta};x,z)L_{\inf}(\overrightarrow{\theta};z,y)$$

由引理 3 知结论得证。

参 考 文 献:

[1] Cogburn R.Markov Chain in random environments:The case of Markovian environments[J].Ann.Probab.,1980,(8):908-916.

[2] Cogburn R.On The Central Limit Theorem for Markov Chains in Random Environments[J].Ann Probab,1991,(19):587-604.

[3] Cogburn R. On direct convergence and periodicity for transition probabilities of Markov Chains in random environments[J].Ann.Probab.,1990,(18):642-654.

[4] Cogburn R. The ergodic theory of Markov Chain in random environments[J].Zwahrsch Verw Gebietl,1984 (66):109-128.

[5] Orey S. Markov Chain with stochastically stationary random environments[J]. AnnProbab, 1991, (19): 907-928.

[6] LI Ying-qiu. Recurrence and invariant measure of Markov chains in bi-infinite random environment[J]. Science in China,2001,44(10):1294-1299.

[7] LI Ying-qiu. Transience and invariant functions for Markov chains in bi-infinite random environment[J]. Chinese Annals of Math,2003,24(2):515-520.

[8] 肖争艳,胡迪鹤.绕积马氏链的状态分类[J].数学物理学报,2003,23A(3):306-313.

[9] 李永奎,胡迪鹤.随机环境中马氏链的禁止概率[J].武汉大学学报:理学版,2006,52(3):273-276.

[10] 崔 静.随机环境中马氏链的状态研究[J].四川理工学院学报:自然科学版,2011,28(5):596-598.

[11] 崔 静.随机环境中马氏链的常返性及禁止概率等问题的研究[D].安徽:安徽师范大学,2008.

Characteristic Number and Taboo Probability of Markov Chains in Random Environments

CUI Jing

(College of Mathematics and Computer Science, Anhui Normal University, Wuhu 241000, China)

Abstract: On the basic of the general theory of Markov Chains, relations between characteristic number and taboo probability of Markov chains in random enviroments are discussed and the decomposition of characteristic number of strong recurrence is given. The property of distribrution moments is obtained by means of the general decomposition formula of Taboo probability, which has enriched the correspanding result of Markov Chairs in randon envirionments described in literatures.

Key words: Markov chains in ramdom environments; Taboo probability; strong recurrence; characteristic number