

基于心态指标的区间灰数预测模型

刘卫锋, 范贺花, 王战伟

(郑州航空工业管理学院数理系, 郑州 450015)

摘要:针对传统灰色预测模型仅适用于实数序列而无法进行区间灰数序列建模的缺陷,引入决策者心态指标,把区间灰数序列转化为带有心态指标的序列,并且当心态指标确定时,带有心态指标的序列就转化为体现决策者心态的实数序列,然后通过对体现决策者心态的实数序列建立灰色预测模型,从而得到了一种基于心态指标的区间灰数预测模型。由于决策者可以通过调整其心态指标建立灰色预测模型,因而使得模型预测更加符合实际。

关键词:灰色系统理论;区间灰数;心态指标;灰色预测模型

中图分类号:0122.1;N94

文献标识码:A

引言

灰色 GM(1,1)模型是灰色系统理论的核心内容和方法之一^[1-2],目前该方法在社会经济、管理和工程技术等领域得到了广泛的应用。但是,灰色 GM(1,1)模型有时会出现预测误差较大的情形,对此,许多学者分别从背景值构造^[3-6],初值条件优化^[7-8],模型参数估计^[9-11]等方面对 GM(1,1)模型进行改进,取得了丰硕的成果。但是,这些研究实际上都是对白数(实数)序列进行建模,因而建立的灰色 GM(1,1)模型并非真正意义上的灰色预测模型。对此,有文献对区间灰数序列的建模进行了研究,其中,文献[12]通过计算灰数层的面积以及灰数层中位线中点的坐标,将区间灰数序列转换成实数序列,建立一种基于区间灰数的预测模型;文献[13]研究了白化权函数已知情况下的区间灰数建模问题,通过计算中间层、起(止)点过渡层的面积以及中间层中位线中点的坐标,将区间灰数序列中所蕴含的信息完整地转换成实数序列,构建了区间灰数预测模型;文献[14]在区间灰数的核和灰度的基础上,提出了基于核和灰度的区间灰数预测模型;文献[15]通过将区间灰数序列转化成相应的发展趋势序列和认知程度,提出了基于发展趋势和认知程度的区间灰数预测模型,实现了对区间灰数

序列的预测。

在综合分析上述研究文献的基础上,受文献[16]启发,本文提出了一种基于心态指标的区间灰数预测模型。首先,在定义了基于心态指标的区间灰数及其相关概念的基础上,通过将决策者的心态指标引入到区间灰数序列,从而得到考虑决策者心态指标的序列,当决策者的心态指标确定时,该心态指标序列就转化为体现出决策者心态的实数序列,然后,对体现决策者心态的实数序列建立灰色预测模型,从而得到了基于决策者心态指标的区间灰数预测模型。

1 基本概念

定义 1^[2] 只知道取值范围而不知其确切值的数称为灰数。常用记号 \otimes 表示灰数。

定义 2^[2] 既有下界 a 又有上界 b 的灰数成为区间灰数,记为 $\otimes \in [a, b]$ 。

定义 3 设区间灰数 $\otimes \in [a, b]$, 若 $a \geq 0$, 则称 $\otimes \in [a, b]$ 为非负区间灰数。

定义 4 对于区间灰数 $\otimes \in [a, b]$, 在 $[0, 1]$ 上定义函数 $F_{\otimes}(\lambda): [0, 1] \rightarrow [a, b]$, $F_{\otimes}(\lambda) = 0.5(a + b) + 0.5(b - a)(2\lambda - 1)$, 称 λ 为决策者对区间灰数 $\otimes \in [a, b]$ 的心态指标。

收稿日期:2011-12-22

基金项目:郑州航空工业管理学院青年科研基金(2011113001,2011113003)

作者简介:刘卫锋(1976-),男,河南周口人,讲师,硕士,主要从事数学建模方面的研究,(E-mail)lwf0519@163.com

当 $\lambda = 0$ 时, $F_{\otimes}(\lambda) = a$, 这时决策者持悲观心态或谨慎心态; 当 $\lambda = 0.5$ 时, $F_{\otimes}(\lambda) = 0.5(a + b)$, 这时决策者持温和心态或中庸心态; 当 $\lambda = 1$ 时, $F_{\otimes}(\lambda) = b$, 这时决策者持乐观心态或激进心态。

显然, 由定义 4 可知, 当决策者的心态指标确定时, $F_{\otimes}(\lambda)$ 就是一个白数(实数)。

定义 5 设区间灰数序列为 $\otimes_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n$, 则称 $0.5(a_i + b_i) + 0.5(b_i - a_i)(2\lambda - 1), i = 1, 2, \dots, n$ 为考虑决策者心态指标的区间灰数序列。

显然, 当决策者的心态指标确定时, 则考虑决策者心态指标的区间灰数序列就成为了体现出决策者心态的区间灰数序列的白化值序列。

2 心态指标区间灰数预测模型

定理 1 设 $X^{(0)}(\otimes) = (x_{\otimes}^{(0)}(1), x_{\otimes}^{(0)}(2), \dots, x_{\otimes}^{(0)}(n))$ 是非负区间灰数序列, 其中, $x_{\otimes}^{(0)}(k) = [a_k, b_k], k = 1, 2, \dots, n$, 考虑决策者心态指标的区间灰数列为

$$X_{\lambda}^{(0)} = (x_{\lambda}^{(0)}(1), x_{\lambda}^{(0)}(2), \dots, x_{\lambda}^{(0)}(n))$$

其中

$$x_{\lambda}^{(0)}(k) = 0.5(a_k + b_k) + 0.5(b_k - a_k)(2\lambda - 1), k = 1, 2, \dots, n,$$

$X_{\lambda}^{(0)}$ 的 1-AGO 序列为

$$X_{\lambda}^{(1)} = (x_{\lambda}^{(1)}(1), x_{\lambda}^{(1)}(2), \dots, x_{\lambda}^{(1)}(n))$$

其中

$$x_{\lambda}^{(1)}(k) = \sum_{i=1}^k x_{\lambda}^{(0)}(i), k = 1, 2, \dots, n$$

背景值序列

$$Z_{\lambda}^{(1)} = (z_{\lambda}^{(1)}(2), z_{\lambda}^{(1)}(3), \dots, z_{\lambda}^{(1)}(n))$$

其中

$$z_{\lambda}^{(1)}(k) = 0.5(x_{\lambda}^{(1)}(k) + x_{\lambda}^{(1)}(k - 1))$$

$$k = 2, 3, \dots, n$$

则(1) GM(1,1)模型 $x_{\lambda}^{(0)}(k) + az_{\lambda}^{(1)}(k) = u$ 的最小二乘估计参数列满足

$$\hat{a} = [a, u]^T = (B^T B)^{-1} B^T Y$$

其中

$$Y = \begin{pmatrix} x_{\lambda}^{(0)}(2) \\ x_{\lambda}^{(0)}(3) \\ \dots \\ x_{\lambda}^{(0)}(n) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -z_{\lambda}^{(1)}(2) & 1 \\ -z_{\lambda}^{(1)}(3) & 1 \\ \dots & \dots \\ -z_{\lambda}^{(1)}(n) & 1 \end{pmatrix}$$

(2) 白化方程 $\frac{dx_{\lambda}^{(1)}(t)}{dt} + ax_{\lambda}^{(1)} = u$ 的解为

$$x_{\lambda}^{(1)}(t) = (x_{\lambda}^{(0)}(1) - \frac{u}{a})e^{-a(t-1)} + \frac{u}{a}$$

(3) GM(1,1)模型 $x_{\lambda}^{(0)}(k) + az_{\lambda}^{(1)}(k) = u$ 的时间

响应序列为

$$\hat{x}_{\lambda}^{(1)}(k) = (x_{\lambda}^{(0)}(1) - \frac{u}{a})e^{-a(k-1)} + \frac{u}{a}, k = 1, 2, \dots$$

(4) 还原值

$$\hat{x}_{\lambda}^{(0)}(k) = (1 - e^a)(x_{\lambda}^{(0)}(1) - \frac{u}{a})e^{-a(k-1)}, k = 1, 2, \dots$$

证明 (1) 将数据代入 $x_{\lambda}^{(0)}(k) + az_{\lambda}^{(1)}(k) = u$, 得

$$x_{\lambda}^{(0)}(2) + az_{\lambda}^{(1)}(2) = u$$

$$x_{\lambda}^{(0)}(3) + az_{\lambda}^{(1)}(3) = u$$

.....

$$x_{\lambda}^{(0)}(n) + az_{\lambda}^{(1)}(n) = u$$

上述等式的矩阵表示形式为 $Y = B\hat{a}$, 其中,

$$Y = \begin{pmatrix} x_{\lambda}^{(0)}(2) \\ x_{\lambda}^{(0)}(3) \\ \dots \\ x_{\lambda}^{(0)}(n) \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -z_{\lambda}^{(1)}(2) & 1 \\ -z_{\lambda}^{(1)}(3) & 1 \\ \dots & \dots \\ -z_{\lambda}^{(1)}(n) & 1 \end{pmatrix}$$

对于 a, b 的一对估计值, 以 $-az_{\lambda}^{(1)}(k) + u$ 代替 $x_{\lambda}^{(0)}(k), k = 2, 3, \dots, n$, 可得误差序列 $\varepsilon = Y - B\hat{a}$ 。

设

$$s = \varepsilon^T \varepsilon = (Y - B\hat{a})^T (Y - B\hat{a}) =$$

$$\sum_{k=2}^n (x_{\lambda}^{(0)}(k) + az_{\lambda}^{(1)}(k) - u)^2$$

为使 s 取最小值, 令

$$\begin{cases} \frac{\partial s}{\partial a} = 2 \sum_{k=2}^n (x_{\lambda}^{(0)}(k) + az_{\lambda}^{(1)}(k) - u) \cdot z_{\lambda}^{(1)}(k) = 0 \\ \frac{\partial s}{\partial u} = -2 \sum_{k=2}^n (x_{\lambda}^{(0)}(k) + az_{\lambda}^{(1)}(k) - u) = 0 \end{cases}$$

解之得

$$a = \frac{\frac{1}{n-1}EF - G}{H - \frac{1}{n-1}F^2}, u = \frac{EH - GF}{(n-1)H - F^2}$$

其中

$$E = \sum_{k=2}^n x_{\lambda}^{(0)}(k), F = \sum_{k=2}^n z_{\lambda}^{(1)}(k)$$

$$G = \sum_{k=2}^n x_{\lambda}^{(0)}(k)z_{\lambda}^{(1)}(k), H = \sum_{k=2}^n (z_{\lambda}^{(1)}(k))^2$$

由 $Y = B\hat{a}$, 得 $B^T B\hat{a} = B^T Y$, 于是 $\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y$ 。又

$$B^T B = \begin{pmatrix} -z_{\lambda}^{(1)}(2) & 1 \\ -z_{\lambda}^{(1)}(3) & 1 \\ \dots & \dots \\ -z_{\lambda}^{(1)}(n) & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -z_{\lambda}^{(1)}(2) & 1 \\ -z_{\lambda}^{(1)}(3) & 1 \\ \dots & \dots \\ -z_{\lambda}^{(1)}(n) & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H & -F \\ -F & n-1 \end{pmatrix}$$

$$(B^T B)^{-1} = \frac{1}{(n-1)H - F^2} \cdot \begin{pmatrix} n-1 & F \\ F & H \end{pmatrix}$$

$$B^T Y = \begin{pmatrix} -z_\lambda^{(1)}(2)1 \\ -z_\lambda^{(1)}(3)1 \\ \dots \\ -z_\lambda^{(1)}(n)1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_\lambda^{(0)}(2) \\ x_\lambda^{(0)}(3) \\ \dots \\ x_\lambda^{(0)}(n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -G \\ E \end{pmatrix}$$

所以

$$\hat{a} = (B^T B)^{-1} B^T Y = \frac{1}{(n-1)H - F^2} \cdot \begin{pmatrix} n-1 & F \\ F & H \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -G \\ E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n-1}EF - G \\ H - \frac{1}{n-1}F^2 \\ \frac{EH - GF}{(n-1)H - F^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ u \end{pmatrix}$$

(2) 微分方程 $\frac{dx_\lambda^{(1)}(t)}{dt} + ax_\lambda^{(1)} = u$ 的通解为

$x_\lambda^{(1)}(t) = ce^{-at} + \frac{u}{a}$, 其中 c 为待定参数。由初始条件

$x_\lambda^{(1)}(1) = x_\lambda^{(0)}(1)$ 求出 $c = e^a(x_\lambda^{(0)}(1) - \frac{u}{a})$, 于是, 连续型响应函数为

$$x_\lambda^{(1)}(t) = (x_\lambda^{(0)}(1) - \frac{u}{a})e^{-a(t-1)} + \frac{u}{a}$$

(3) 将连续型响应函数离散化, 即得离散型响应函数为

$$\hat{x}_\lambda^{(1)}(k) = (x_\lambda^{(0)}(1) - \frac{u}{a})e^{-a(k-1)} + \frac{u}{a}, k = 1, 2, \dots$$

(4) 显然

由定理 2 可知, 当区间灰数序列 $\otimes_i \in [a_i, b_i], i = 1, 2, \dots, n$ 中 $a_i = b_i, i = 1, 2, \dots, n$ 时, 此时考虑心态指标的区间灰数序列 GM(1,1) 模型就是传统的 GM(1,1) 模型。同时, 根据决策者心态指标 λ 的取值, 可以建立一系列灰色 GM(1,1) 模型, 这些灰色 GM(1,1) 模型体现了决策者的不同心态。

3 计算实例

例^[15] 某企业在分析竞争对手发展趋势时, 缺少对手销售额的准确资料, 通过对共同竞标等经营活动中收集的信息进行分析后, 对该企业销售额的最大值和最小值进行了估计, 认为近几年该企业的销售额见表 1。请对该企业以后的销售额进行预测。

表 1 某企业销售额序列

| 数值(万元) | 年份 | | | |
|--------|------|------|------|------|
| | 2005 | 2006 | 2007 | 2008 |
| 最小值 | 80 | 95 | 120 | 130 |
| 最大值 | 100 | 120 | 150 | 160 |

将区间灰数序列 $X^{(0)}(\otimes) = ([80, 100], [95, 120], [120, 150], [130, 160])$ 转化为带有心态指标 λ 的序列 $X_\lambda = (90 + 10(2\lambda - 1), 107.5 + 12.5(2\lambda - 1), 135 + 15(2\lambda - 1), 145 + 15(2\lambda - 1))$ 。

将心态指标 λ 分别取 0, 0.3, 0.5, 0.8, 1, 然后对心态指标序列 $X_\lambda^{(0)}$ 进行建模, 并将计算出的模型参数、模拟值和预测值、相对误差等数据列入表 2。

表 2 模型计算结果

| 心态指标 | 0 | | | 0.3 | | | 0.5 | | | 0.8 | | | 1 | | |
|-----------|------------------|----------|---------|------------------|----------|---------|------------------|----------|---------|------------------|----------|---------|-------------------|----------|---------|
| 参数 a, u | -0.1486, 79.2030 | | | -0.1443, 86.1194 | | | -0.1417, 90.7319 | | | -0.1382, 97.6526 | | | -0.1361, 102.2675 | | |
| 年份 | 原始序列 | 模拟预测值 | 相对误差(%) | 原始序列 | 模拟预测值 | 相对误差(%) |
| 2005 | 80 | 80 | 0 | 86 | 86 | 0 | 90 | 90 | 0 | 96 | 96 | 0 | 100 | 100 | 0 |
| 2006 | 95 | 98.2071 | 3.38 | 102.5 | 105.9927 | 3.41 | 107.5 | 111.1757 | 3.42 | 115 | 118.9500 | 3.43 | 120 | 124.0357 | 3.36 |
| 2007 | 120 | 113.9408 | -5.05 | 129 | 122.4460 | -5.08 | 135 | 128.1001 | -5.11 | 144 | 136.5790 | -5.15 | 150 | 142.1054 | 5.26 |
| 2008 | 130 | 132.1951 | 1.69 | 139 | 141.4534 | 1.77 | 145 | 147.6009 | 1.79 | 154 | 156.8207 | 1.83 | 160 | 162.8076 | 1.75 |
| 平均相对误差(%) | 2.53 | | | 2.57 | | | 2.58 | | | 2.60 | | | 2.59 | | |
| 2009 | 153.3739 | | | 161.4113 | | | 170.0704 | | | 180.0623 | | | 186.5257 | | |
| 2010 | 177.9458 | | | 188.7777 | | | 195.9603 | | | 206.7485 | | | 213.6991 | | |
| 2011 | 206.4543 | | | 218.0818 | | | 225.7915 | | | 237.3897 | | | 244.8312 | | |
| 2012 | 239.5301 | | | 251.9348 | | | 260.1640 | | | 272.5721 | | | 280.4987 | | |
| 2013 | 277.9049 | | | 291.0428 | | | 299.7690 | | | 312.9687 | | | 321.3629 | | |

从表 2 可知, 当 λ 分别取 0, 0.3, 0.5, 0.8, 1 时, 模型的平均相对误差分别为: 2.53%, 2.57%, 2.58%, 2.60%, 2.59%, 显然, 模型的模拟精度较好, 可以进行预测。此外, 不难发现, 当 λ 分别取 0, 1 时, 就是分别根据企业销售额的最小值序列和最大值序列建立的灰色预测模型, 而当 λ 取 0.5 时建模, 就是文献[15]中根据

区间灰数的发展趋势建立的灰色预测模型。同时, 从表 2 中也可发现, 决策者的心态指标对模型的模拟和预测值有着非常重要的影响, 决策者处于不同的心态时, 可以调整其心态建立不同的预测模型, 以便于决策者决策时进行参考, 因此, 带有决策者心态指标的区间灰数预测模型更加符合实际情况。

4 结束语

针对传统灰色预测模型仅适用于实数序列而无法进行区间灰数序列建模的缺陷,提出了一种基于心态指标的区间灰数预测模型,通过引入决策者心态指标,把区间灰数序列转化为带有心态指标的序列,并且当心态指标确定时,通过对体现决策者心态的实数序列进行建模,从而得到了基于心态指标的区间灰数预测模型。该模型的优点在于,当决策者处于不同心态时,可以通过调整其心态指标建立反映出决策者心态的灰色预测模型,因而使得模型预测更加符合实际。

参考文献:

- [1] 邓聚龙.灰色系统理论教程[M].武汉:华中理工大学出版社,1990.
- [2] 刘思峰,党耀国,方志耕,等.灰色系统理论及其应用[M].5版.北京:科学出版社,2010.
- [3] 谭冠军.GM(1,1)模型的背景值构造方法和应用(I)[J].系统工程理论与实践,2000,20(4):98-103.
- [4] 陈永刚,杨定远,戴文战.基于背景值改进的GM(1,1)预测模型的研究及其应用[J].浙江理工大学学报,2007,24(4):444-447,460.
- [5] 刘乐,王洪国,王宝伟.基于背景值构造方法的GM(1,1)模型优化[J].统计与决策,2009(1):153-155.
- [6] 罗党,刘思峰,党耀国.灰色模型GM(1,1)优化[J].中国工程科学,2003,5(8):50-53.
- [7] 党耀国,刘思峰,刘斌.以 $x(n)$ 为初始条件的GM模型[J].中国管理科学,2005,13(1):132-135.
- [8] 张辉,胡适耕.GM(1,1)模型的边值分析[J].华中科技大学学报,2001,19(4):110-111.
- [9] 穆勇.灰色预测模型参数估计的优化方法[J].青岛大学学报,2003,16(3):95-98.
- [10] 田林亚,赵小飞,何习平.灰色模型GM(1,1)的稳健算法及其应用[J].吉首大学学报:自然科学版,2006,27(4):47-49.
- [11] 何文章,宋国乡,吴爱弟.估计GM(1,1)模型中参数的一族算法[J].系统工程理论与实践,2005,25(1):69-75.
- [12] 曾波,刘思峰,谢乃明,等.基于灰数带及灰数层的区间灰数预测模型[J].控制与决策,2010,25(10):1585-1588,1592.
- [13] 曾波,刘思峰,崔杰.白化权函数已知的区间灰数预测模型[J].控制与决策,2010,25(12):1815-1820.
- [14] 曾波.基于核和灰度的区间灰数预测模型[J].系统工程与电子技术,2011,33(4):821-824.
- [15] 袁潮清,刘思峰,张可.基于发展趋势和认知程度的区间灰数预测[J].控制与决策,2011,26(2):313-315,319.
- [16] 张兴芳,管恩瑞,孟广武.区间值模糊综合评判及其应用[J].系统工程理论与实践,2001,21(12):81-84,116.

Prediction Model of Interval Grey Number Base on Attitude Index

LIU Wei-feng, FAN He-hua, WANG Zhan-wei

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract: According to the fact that traditional grey prediction models are only appropriate for forecasting real number sequence but not for interval grey number sequence, by introducing the attitude index of decision maker, the interval grey number sequence is transformed into sequence with attitude index when the attitude index of decision maker is known, the sequence with attitude index is transformed into real number sequence. By embodying the attitude of decision maker and building grey prediction model for real number sequence with the attitude index of decision maker, an interval grey number prediction model with attitude index of decision maker is proposed. As the decision maker can build grey prediction model through adjusting the attitude index, model prediction is more practical. Finally, a practical example is given to illustrate the proposed model.

Key words: Grey system theory; interval grey number; attitude index; grey prediction model