

# Aczel 不等式的新结果

赵军芳, 秦飞龙

(成都理工大学管理科学学院, 成都 610059)

**摘要:**在 Aczel 不等式和推广后的 Aczel 不等式的基础上再加入一组数串,通过初等方法得到了三组数串的新结果,并且利用分段思想将  $p > 2$  用  $0 < p \leq 2$  来表示并得出新的结果,最后给出实例以证明其使用价值。

**关键词:** Aczel 不等式;反向不等式;实数串

**中图分类号:** O178

**文献标识码:** A

著名的 Aczel 不等式<sup>[1]</sup>最初只给出了  $p = 2$  的形式,后来 Bjelica 将其推广到  $0 < p \leq 2$  及  $p < 0$  的形式<sup>[2]</sup>,1999 年李康海提出猜想  $p > 2$  情况下,不等式

$$(a_1^p - \sum_{k=2}^n a_k^p)(b_1^p - \sum_{k=2}^n b_k^p) > (a_1 b_1 - \sum_{k=2}^n a_k b_k)^p$$

成立<sup>[3-4]</sup>,到目前为止仍未证明。2000 年孙燮华<sup>[5-6]</sup>对此不等式进行了推广。关于 Aczel 不等式已有许多推广<sup>[7-10]</sup>。本文对 Aczel 不等式以及 Bjelica 推广后的不等式进行研究,给出了三组数串及  $p > 2$  的形式,并用实例揭示了推广后不等式的使用价值。

## 1 主要引理

**引理 1** (Aczel 不等式) 设

$$(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n) \text{ 和 } (b) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

是满足

$$a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0, b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2 > 0$$

的实数串,则成立不等式

$$(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2) \leq (a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^2$$

式的等号成立当且仅当数串  $(a)$  与数串  $(b)$  成比例。

**引理 2** 设  $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$  和  $(b) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  是满足  $(a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p) > 0, (b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p) > 0$  的实数串,则  $0 < p \leq 2$  时成立不等式

$$(a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p)(b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p) \leq (a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^p$$

当  $p < 0$  时,式的反向不等式成立。

## 2 新 Aczel 不等式

**定理 1** 设  $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n), (b) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  和  $(c) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$  是满足  $a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0, b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2 > 0, c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_n^2 > 0$  的实数串,则成立不等式

$$\begin{aligned} &(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^2 \geq \\ &(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)^{\frac{1}{2}}(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)^{\frac{1}{2}} \\ &(c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_n^2)^{\frac{1}{2}} \\ &(a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - \dots - a_n^2 b_n^2)^{\frac{1}{2}} \\ &(a_1^2 c_1^2 - a_2^2 c_2^2 - \dots - a_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{2}} \\ &(b_1^2 c_1^2 - b_2^2 c_2^2 - \dots - b_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

其中等号成立当且仅当数串  $(a)$  与数串  $(bc)$  成比例,数串  $(b)$  与数串  $(ac)$  成比例,数串  $(c)$  与数串  $(ab)$  成比例,其中  $(ab) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n), (ac) = (a_1 c_1, a_2 c_2, \dots, a_n c_n), (bc) = (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_n c_n)$ 。

**证明** 由于

$$a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2 > 0, b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2 > 0$$

故

$$a_1^2 > \sum_{i=2}^n a_i^2, b_1^2 > \sum_{i=2}^n b_i^2$$

两式相乘可得

$$a_1^2 b_1^2 > \sum_{i=2}^n a_i^2 \sum_{i=2}^n b_i^2$$

整理可得

$$a_1^2 b_1^2 - \sum_{i=2}^n a_i^2 b_i^2 > \sum_{i \neq j, j=2}^n a_i^2 b_j^2$$

显然有

$$\sum_{i \neq j, j=2}^n a_i^2 b_i^2 > 0$$

故

$$a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - \dots - a_n^2 b_n^2 > 0$$

成立,使用引理1可得

$$(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^2 \geq (a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - \dots - a_n^2 b_n^2)(c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_n^2)$$

其等号成立当且仅当数串(c)与数串(ab)成比例。同理可得

$$(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^2 \geq (a_1^2 c_1^2 - a_2^2 c_2^2 - \dots - a_n^2 c_n^2)(b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)$$

其中等号成立当且仅当数串(b)与数串(ac)成比例。

$$(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^2 \geq (b_1^2 c_1^2 - b_2^2 c_2^2 - \dots - b_n^2 c_n^2)(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)$$

其中等号成立当且仅当数串(a)与数串(bc)成比例。

三式相乘且两边同时开三次方可得

$$(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^2 \geq (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)^{\frac{1}{3}} (b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)^{\frac{1}{3}} (c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_n^2)^{\frac{1}{3}} (a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - \dots - a_n^2 b_n^2)^{\frac{1}{3}} (a_1^2 c_1^2 - a_2^2 c_2^2 - \dots - a_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{3}} (b_1^2 c_1^2 - b_2^2 c_2^2 - \dots - b_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{3}}$$

其中等号成立当且仅当数串(a)与数串(bc)成比例,数串(b)与数串(ac)成比例,数串(c)与数串(ab)成比例,其中

$$(ab) = (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n)$$

$$(ac) = (a_1 c_1, a_2 c_2, \dots, a_n c_n)$$

$$(bc) = (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_n c_n)$$

**定理2** 设(a) = (a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, ..., a<sub>n</sub>), (b) = (b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, ..., b<sub>n</sub>), (c) = (c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, ..., c<sub>n</sub>)是满足(a<sub>1</sub><sup>p</sup> - a<sub>2</sub><sup>p</sup> - ... - a<sub>n</sub><sup>p</sup>) > 0 (b<sub>1</sub><sup>p</sup> - b<sub>2</sub><sup>p</sup> - ... - b<sub>n</sub><sup>p</sup>) > 0, (c<sub>1</sub><sup>p</sup> - c<sub>2</sub><sup>p</sup> - ... - c<sub>n</sub><sup>p</sup>) > 0的实数串,则0 < p < 2时,成立不等式

$$(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^p > (a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p)^{\frac{1}{3}} (b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p)^{\frac{1}{3}} (c_1^p - c_2^p - \dots - c_n^p)^{\frac{1}{3}} (a_1^p b_1^p - a_2^p b_2^p - \dots - a_n^p b_n^p)^{\frac{1}{3}} (a_1^p c_1^p - a_2^p c_2^p - \dots - a_n^p c_n^p)^{\frac{1}{3}} (b_1^p c_1^p - b_2^p c_2^p - \dots - b_n^p c_n^p)^{\frac{1}{3}}$$

当p < 0时,反向不等式成立。

**证明** 由于(a<sub>1</sub><sup>p</sup> - a<sub>2</sub><sup>p</sup> - ... - a<sub>n</sub><sup>p</sup>) > 0

$$(b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p) > 0$$

显然有

$$(a_1^p b_1^p - a_2^p b_2^p - \dots - a_n^p b_n^p) > 0$$

使用引理2可得

$$(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^p > (b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p)(a_1^p c_1^p - a_2^p c_2^p - \dots - a_n^p c_n^p)$$

同理可得

$$(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^p > (a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p)(b_1^p c_1^p - b_2^p c_2^p - \dots - b_n^p c_n^p)$$

$$(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^p > (c_1^p - c_2^p - \dots - c_n^p)(a_1^p b_1^p - a_2^p b_2^p - \dots - a_n^p b_n^p)$$

由于三式两边显然都大于零,故三式相乘且两边同时开三次方得

$$(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^p > (a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p)^{\frac{1}{3}} (b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p)^{\frac{1}{3}} (c_1^p - c_2^p - \dots - c_n^p)^{\frac{1}{3}} (a_1^p b_1^p - a_2^p b_2^p - \dots - a_n^p b_n^p)^{\frac{1}{3}} (a_1^p c_1^p - a_2^p c_2^p - \dots - a_n^p c_n^p)^{\frac{1}{3}} (b_1^p c_1^p - b_2^p c_2^p - \dots - b_n^p c_n^p)^{\frac{1}{3}}$$

**定理3** 设(a) = (a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, ..., a<sub>n</sub>)和(b) = (b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, ..., b<sub>n</sub>)是满足

$$(a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p) > 0, (b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p) > 0$$

的实数串,则p > 2时成立不等式

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^p \geq (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)^m (b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)^m (a_1^k - a_2^k - \dots - a_n^k)(b_1^k - b_2^k - \dots - b_n^k) \quad (1)$$

其中, p = 2m + k, 0 ≤ k ≤ 2, m = 1, 2, ..., 其等号成立当且仅当数串(a)与数串(b)成比例。

**证明** 由题设知p = 2m + k, 0 ≤ k ≤ 2, m = 1, 2, ... 则利用引理1和引理2得

$$(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^p = (a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^{2m+k} = [(a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^2]^m (a_1 b_1 - a_2 b_2 - \dots - a_n b_n)^k \geq (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)^m (b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)^m (a_1^k - a_2^k - \dots - a_n^k)(b_1^k - b_2^k - \dots - b_n^k)$$

故(1)式成立, p = 2m + k, 0 ≤ k ≤ 2, m = 1, 2, ... 其中其等号成立当且仅当数串(a)与数串(b)成比例。

**定理4** 设(a) = (a<sub>1</sub>, a<sub>2</sub>, ..., a<sub>n</sub>) (b) = (b<sub>1</sub>, b<sub>2</sub>, ..., b<sub>n</sub>)和(c) = (c<sub>1</sub>, c<sub>2</sub>, ..., c<sub>n</sub>)是满足(a<sub>1</sub><sup>p</sup> - a<sub>2</sub><sup>p</sup> - ... - a<sub>n</sub><sup>p</sup>) > 0, (b<sub>1</sub><sup>p</sup> - b<sub>2</sub><sup>p</sup> - ... - b<sub>n</sub><sup>p</sup>) > 0, (c<sub>1</sub><sup>p</sup> - c<sub>2</sub><sup>p</sup> - ... - c<sub>n</sub><sup>p</sup>) > 0的实数串,则p > 2时,成立不等式

$$\begin{aligned}
 & (a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^p \geq \\
 & (a_1^p - a_2^p - \dots - a_n^p)^{\frac{1}{p}} (b_1^p - b_2^p - \dots - b_n^p)^{\frac{1}{p}} \\
 & (c_1^p - c_2^p - \dots - c_n^p)^{\frac{1}{p}} (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)^{\frac{1}{2}} (c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - \dots - a_n^2 b_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (a_1^2 c_1^2 - a_2^2 c_2^2 - \dots - a_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (b_1^2 c_1^2 - b_2^2 c_2^2 - \dots - b_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (a_1^k b_1^k - a_2^k b_2^k - \dots - a_n^k b_n^k)^{\frac{1}{k}} \\
 & (a_1^k c_1^k - a_2^k c_2^k - \dots - a_n^k c_n^k)^{\frac{1}{k}} \\
 & (b_1^k c_1^k - b_2^k c_2^k - \dots - b_n^k c_n^k)^{\frac{1}{k}}
 \end{aligned}$$

其中  $p = 2m + k, 0 \leq k < 2, m = 1, 2, \dots$ , 其等号成立当且仅当数串  $(a)$  与数串  $(bc)$  成比例, 数串  $(b)$  与数串  $(ac)$  成比例, 数串  $(c)$  与数串  $(ab)$  成比例, 其中

$$\begin{aligned}
 (ab) &= (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \\
 (ac) &= (a_1 c_1, a_2 c_2, \dots, a_n c_n) \\
 (bc) &= (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_n c_n)
 \end{aligned}$$

**证明** 由于  $p = 2m + k, 0 \leq k < 2m = 1, 2, \dots$  则利用定理 1, 定理 2 和定理 3 可得:

$$\begin{aligned}
 & (a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^p = \\
 & (a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^{2m+k} = \\
 & [(a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^2]^m \\
 & (a_1 b_1 c_1 - a_2 b_2 c_2 - \dots - a_n b_n c_n)^k \geq \\
 & [(a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_n^2)^{\frac{1}{2}} (a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - \dots - a_n^2 b_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (a_1^2 c_1^2 - a_2^2 c_2^2 - \dots - a_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (b_1^2 c_1^2 - b_2^2 c_2^2 - \dots - b_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{2}}]^m \\
 & (a_1^k - a_2^k - \dots - a_n^k)^{\frac{1}{k}} (b_1^k - b_2^k - \dots - b_n^k)^{\frac{1}{k}} \\
 & (c_1^k - c_2^k - \dots - c_n^k)^{\frac{1}{k}} (a_1^k b_1^k - a_2^k b_2^k - \dots - a_n^k b_n^k)^{\frac{1}{k}} \\
 & (a_1^k c_1^k - a_2^k c_2^k - \dots - a_n^k c_n^k)^{\frac{1}{k}} \\
 & (b_1^k c_1^k - b_2^k c_2^k - \dots - b_n^k c_n^k)^{\frac{1}{k}} = \\
 & (a_1^2 - a_2^2 - \dots - a_n^2)^{\frac{1}{2}} (b_1^2 - b_2^2 - \dots - b_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (c_1^2 - c_2^2 - \dots - c_n^2)^{\frac{1}{2}} (a_1^2 b_1^2 - a_2^2 b_2^2 - \dots - a_n^2 b_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (a_1^2 c_1^2 - a_2^2 c_2^2 - \dots - a_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{2}} \\
 & (b_1^2 c_1^2 - b_2^2 c_2^2 - \dots - b_n^2 c_n^2)^{\frac{1}{2}} (a_1^k - a_2^k - \dots - a_n^k)^{\frac{1}{k}} \\
 & (b_1^k - b_2^k - \dots - b_n^k)^{\frac{1}{k}} (c_1^k - c_2^k - \dots - c_n^k)^{\frac{1}{k}} \\
 & (a_1^k b_1^k - a_2^k b_2^k - \dots - a_n^k b_n^k)^{\frac{1}{k}} \\
 & (a_1^k c_1^k - a_2^k c_2^k - \dots - a_n^k c_n^k)^{\frac{1}{k}} \\
 & (b_1^k c_1^k - b_2^k c_2^k - \dots - b_n^k c_n^k)^{\frac{1}{k}}
 \end{aligned}$$

其等号成立当且仅当数串  $(a)$  与数串  $(bc)$  成比例, 数串  $(b)$  与数串  $(ac)$  成比例, 数串  $(c)$  与数串  $(ab)$  成比

例, 其中

$$\begin{aligned}
 (ab) &= (a_1 b_1, a_2 b_2, \dots, a_n b_n) \\
 (ac) &= (a_1 c_1, a_2 c_2, \dots, a_n c_n) \\
 (bc) &= (b_1 c_1, b_2 c_2, \dots, b_n c_n)
 \end{aligned}$$

### 3 不等式举例

**例 1** 设  $M^k - (\int_a^b p(x) |f(x)| dx)^k > 0$

$$N^k - (\int_a^b p(x) |g(x)| dx)^k > 0$$

$$R^k - (\int_a^b p(x) |h(x)| dx)^k > 0$$

其中  $M, N, R$  都是实数,  $p(x), f(x), g(x), h(x)$  都是实函数且  $0 < k \leq 2$ , 则下列不等式成立

$$(MNR - \int_a^b p(x) |f(x)g(x)h(x)| dx)^k \geq$$

$$(M^k - \int_a^b p(x)^k |f(x)|^k dx)^{\frac{1}{k}} (N^k -$$

$$\int_a^b p(x)^k |g(x)|^k dx)^{\frac{1}{k}} (R^k -$$

$$\int_a^b p(x)^k |h(x)|^k dx)^{\frac{1}{k}} (M^k N^k -$$

$$\int_a^b p(x)^{2k} |f(x)g(x)|^k dx)^{\frac{1}{k}} (M^k R^k -$$

$$\int_a^b p(x)^{2k} |f(x)h(x)|^k dx)^{\frac{1}{k}} (N^k R^k -$$

$$\int_a^b p(x)^{2k} |g(x)h(x)|^k dx)^{\frac{1}{k}}$$

**证明** 设  $a = (M, \int_a^b p(x) |f(x)| dx)$

$$b = (N, \int_a^b p(x) |g(x)| dx)$$

$$c = (R, \int_a^b p(x) |h(x)| dx)$$

即  $a, b, c$  为实数串。由于

$$M^k - (\int_a^b p(x) |f(x)| dx)^k > 0$$

$$N^k - (\int_a^b p(x) |g(x)| dx)^k > 0$$

$$R^k - (\int_a^b p(x) |h(x)| dx)^k > 0$$

故

$$(\int_a^b p(x) |f(x)| dx)^k (\int_a^b p(x) |g(x)| dx)^k >$$

$$0 (\int_a^b p(x) |f(x)| dx)^k (\int_a^b p(x) |h(x)| dx)^k >$$

$$0 (\int_a^b p(x) |g(x)| dx)^k (\int_a^b p(x) |h(x)| dx)^k > 0$$

又  $0 < k \leq 2$  故满足定理 2 的条件, 所以由定理 2 可得

$$(MNR - \int_a^b p(x) |f(x)g(x)h(x)| dx)^k \geq$$

$$\begin{aligned}
& (M^k - (\int_a^b p(x) |f(x)| dx)^k)^{\frac{1}{p}} (N^k - \\
& (\int_a^b p(x) |g(x)| dx)^k)^{\frac{1}{q}} (R^k - \\
& (\int_a^b p(x) |h(x)| dx)^k)^{\frac{1}{r}} (M^k N^k - \\
& (\int_a^b p(x) |f(x)| dx)^k (\int_a^b p(x) |g(x)| dx)^k)^{\frac{1}{p}} (M^k R^k - \\
& (\int_a^b p(x) |f(x)| dx)^k (\int_a^b p(x) |h(x)| dx)^k)^{\frac{1}{q}} (N^k R^k - \\
& (\int_a^b p(x) |g(x)| dx)^k (\int_a^b p(x) |h(x)| dx)^k)^{\frac{1}{r}} \geq \\
& (M^k - \int_a^b p(x)^k |f(x)|^k dx)^{\frac{1}{p}} (N^k - \\
& \int_a^b p(x)^k |g(x)|^k dx)^{\frac{1}{q}} (R^k - \\
& \int_a^b p(x)^k |h(x)|^k dx)^{\frac{1}{r}} (M^k N^k - \\
& \int_a^b p(x)^{2k} |f(x)g(x)|^k dx)^{\frac{1}{p}} (M^k R^k - \\
& \int_a^b p(x)^{2k} |f(x)h(x)|^k dx)^{\frac{1}{q}} (N^k R^k - \\
& \int_a^b p(x)^{2k} |g(x)h(x)|^k dx)^{\frac{1}{r}}
\end{aligned}$$

故原不等式成立。

#### 参考文献:

- [1] Mitrinovic D S,著.张小萍,王龙,译.解析不等式[M].北京:科学出版社,1987.
- [2] Bjelica M. On Inequalities for indefinite form[J]. Anal. Num.thero. Apprax(Cluj),1990(19):105-109.
- [3] 李康海.一个代数不等式的修正[J].数学通讯,1999,6(5):27-28.
- [4] 吴文权.陈卫军.探讨几个数学猜想[J].阿坝师范高等专科学校学报,1999(2):21-22.
- [5] 孙燮华.分析不等式的新结果(III):泛函型不等式[J].中国计量学院学报,2000,11(1):1-7.
- [6] 孙燮华.分析不等式的新结果(IV):泛函型不等式[J].中国计量学院学报,2000,11(2):1-8.
- [7] 匡继昌.常用不等式[M].山东:山东科学技术出版社,2004.
- [8] 吴善和.关于推广 Popoviciu 不等式的两个结果[J].四川师范大学学报,2004,27(3):251-255.
- [9] 胡克. Aczel - Popoviciu - Vasic 不等式[J].江西师范大学学报,2006,30(2):158-160.
- [10] 楼宇同. Aczel 不等式的推广[J].南京航空学院学报,1991,23(2):77-86.

## Some New Results on Aczel Inequalities

ZHAO Jun-fang, QIN Fei-long

(College of Management Science, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

**Abstract:** On the basis of Aczel inequalities and the generalized Aczel inequalities, through joining a real string and using elementary method, three groups of new results are obtained. A renewal result is also acquired through expressing  $p > 2$  as  $0 < p \leq p$ . Finally, an example is given to prove its use value.

**Key words:** Aczel inequality; reverse inequality; real string