文章编号:1673-1549(2012)01-0090-03

球域内 Poisson 方程 Numann 问题解的积分表达式

郭时光

(四川理工学院理学院,四川　自贡　643000)

摘　要:研究球域内 Poisson 方程 Numann 问题,用缔合 Legendre 函数作为过渡,通过数学推导,得出了该问题解的积分表达式。这个公式可以应用于电磁震荡方面的分析和计算。

关键词:球域;Poisson 方程;Numann 问题;缔合 Legendre 函数

中图分类号:O175　　　　**文献标识码:**A

球域内球坐标 $r\theta\varphi$ 的 Poisson 方程 Neumann 问题的一般形式为[1-4]

$$\left.\begin{array}{c}\Delta u = f(r,\theta,\varphi)\\ (0 \leqslant r < b, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)\\ \dfrac{\partial}{\partial r}u = -g(\theta,\varphi)\\ (r = b, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)\end{array}\right\} \tag{1}$$

其中,f 与 g 均为连续可积函数。在研究球域内的电势等问题时,均需要计算其解。然而其解的明确表达式尚未见于文献[4-11]。本文给出这个问题的解的一个积分表达式。

1　基本引理

三维 Green 方程 Neumann 问题为[5]

$$\left.\begin{array}{l}\Delta G(M,M_0) = -\delta(MM_0)(M \in V)\\ \dfrac{\partial G(M,M_0)}{\partial n} = -\dfrac{1}{K(\partial V)}(M \in \partial V)\end{array}\right\} \tag{2}$$

其中,V 是有界区域;$K(\partial V) = \oiint_{\partial V} ds_M$。

问题(2)的解 $G = G(M,M_0)$ 称为有界区域 V 的 Neumann – Green 函数。定解问题

$$\left.\begin{array}{l}\Delta E(M,M_0) = 0(M \in V)\\ \dfrac{\partial E(M,M_0)}{\partial n} = -\dfrac{\partial G_0(M,M_0)}{\partial n} - \dfrac{1}{K(\partial V)}\\ (M \in \partial V)\end{array}\right\} \tag{3}$$

的解 $E = E(M,M_0)$ 称为调和 Neumann – Green 函数。

引理 1[5]　设 Poisson 方程 Neumann 问题为

$$\left.\begin{array}{l}\Delta u = f(M)(M \in V)\\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = g(M)(M \in \partial V)\end{array}\right\} \tag{4}$$

其中,V 是三维区域,它具有逐片光滑的边界∂V;n 是边界∂V 的向外法线方向。如果自由项 f(M)与 g(M)均为连续可积函数,则问题(4)存在下列形式解的积分表达式

$$u = u(M) = \oiint_{\partial V} g(M_0)G(M_0,M)ds_{M_0} - \iiint_V f(M_0)G(M_0,M)d\sigma_{M_0} + c_3 \tag{5}$$

其中,$G(M,M_0)$是区域 V 的 Neumann – Green 函数,c_3 是常数。

将缔合 Legendre 函数记作 $P_{lm}(x)$,即

$$P_{lm}(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}P_l^{(m)}(x)(0 \leqslant m \leqslant l, |x| \leqslant 1) \tag{6}$$

其中,$P_l(x)$是 Legendre 函数。

引理 2[6]　两个函数序列 $\{P_{lm}(\cos\varphi)\cos m\theta\}$ 与 $\{P_{lm}(\cos\varphi)\sin m\theta\}$ 存在如下正交关系

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_{nm}(\cos\varphi)P_{kl}(\cos\varphi)\sin\varphi \times \begin{Bmatrix}\cos m\theta\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos l\theta\\ \sin l\theta\end{Bmatrix}d\varphi d\theta = \begin{cases}\dfrac{2\pi(n+m)!\delta_m}{(2n+1)(n-m)!}(m = l, n = k)\\ 0 \qquad (m \neq l \text{或} n \neq k)\end{cases} \tag{7}$$

其中,两个花括弧相乘是指各个花括弧中任意取一个相乘,所以该积分式表示 4 个积分;而

$$\delta_m = \begin{cases}2(m = 0)\\ 1(m \neq 0)\end{cases} \tag{8}$$

引理 3[5]　成立加法公式

$$\sum_{m=0}^{l}\frac{2(l-m)!}{(l+m)!\delta_m} \times P_{lm}(\cos\varphi)P_{lm}(\cos\varphi_0)\cos m(\theta-\theta_0) = P_l(\cos\gamma) \tag{9}$$

收稿日期:2011-10-08

作者简介:郭时光(1955-),男,重庆人,副教授,主要从事代数和数学物理方程方面的研究,(E-mail)youare20002000@qq.com

其中

$$\cos\gamma = \cos\varphi_0\cos\varphi + \sin\varphi_0\sin\varphi\cos(\theta - \theta_0) \quad (10)$$

2 球域内的调和 Neumann – Green 函数

求解球域内 Laplace 方程 Neumann 问题

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \\ &\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right) = 0 \\ &\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = g(\theta,\varphi) \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

$$(0 \leqslant r \leqslant b, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$$

用分离变数法,得其泛定方程的有界解为

$$u = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} r^l (A_{lm}\cos m\theta + B_{lm}\sin m\theta) \times P_{lm}(\cos\varphi) \quad (12)$$

用边界条件,得

$$g(\theta,\varphi) = \left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=b} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} lb^{l-1}(A_{lm}\cos m\theta + B_{lm}\sin m\theta)P_{lm}(\cos\varphi)$$

利用 Fourier 级数展开系数公式和正交关系式计算,得系数为

$$A_{lm} = \frac{1}{lb^{l-1}}\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!\delta_m} \times \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta,\varphi)P_{lm}(\cos\varphi)\cos m\theta\sin\varphi d\varphi d\theta$$

$$B_{lm} = \frac{1}{lb^{l-1}}\frac{(2l+1)(l-m)!}{2\pi(l+m)!} \times \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} g(\theta,\varphi)P_{lm}(\cos\varphi)\sin m\theta\sin\varphi d\varphi d\theta$$

其中 $(l \neq 0)$。将其代入解的表达式(12)式,交换积分与求和的次序,用三角公式化简,得

$$u = A_{00} + \frac{b}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi_0 d\varphi_0\int_0^{2\pi} g(\theta_0,\varphi_0) \times \Big[\sum_{l=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{l}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^l \sum_{m=0}^{l}\frac{2(l-m)!}{(l+m)!\delta_m} \times P_{lm}(\cos\varphi)P_{lm}(\cos\varphi_0)\cos m(\theta-\theta_0)\Big]d\theta_0 \quad (13)$$

为进一步化简,引用加法公式,以及公式

$$\frac{1}{\sqrt{1 + r^2 - 2r\cos\varphi}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos\varphi)$$

得

$$\sum_{l=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{l}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^l \sum_{m=0}^{l}\frac{2(l-m)!}{(l+m)!\delta_m} \times P_{lm}(\cos\varphi)P_{lm}(\cos\varphi_0)\cos m(\theta-\theta_0) = \sum_{l=1}^{\infty}\left(2+\frac{1}{l}\right)\left(\frac{r}{b}\right)^l P_l(\cos\gamma) = 2\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{r}{b}\right)^l P_l(\cos\gamma) + \sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{l}\left(\frac{r}{b}\right)^l P_l(\cos\gamma) = 2\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\gamma}} - 1\right) + \int_0^r \frac{1}{r}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\gamma}} - 1\right)dr \quad (14)$$

将式(14)代入式(13),得问题(11)解的积分表达式

$$u = A_{00} + \frac{b}{4\pi}\int_0^{\pi}\sin\varphi_0 d\varphi_0\int_0^{2\pi} g(\theta_0,\varphi_0) \times \left[2\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\gamma}} - 1\right) + \int_0^r \frac{1}{r}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\gamma}} - 1\right)dr\right]d\theta_0 \quad (15)$$

其中 A_{00} 是常数。

其次,求解半径为 b 的球域内的 Neumann – Green 函数。为此先解调和 Neumann – Green 函数 E 的定解问题

$$\left.\begin{aligned} &\Delta E = 0 \\ &(0 \leqslant r < b, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \\ &\frac{\partial}{\partial r}E = -\frac{\partial G_0}{\partial r} - \frac{1}{4\pi b^2} \\ &(r = b, 0 \leqslant \theta < 2\pi, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi) \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

其中,$G_0 = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma}}$ 为三维无限区域的基本 Green 函数。用表达式(15),其中代以

$$u = E, A_{00} = 0$$

$$g(\theta,\varphi) = -\left.\frac{\partial G_0}{\partial r}\right|_{r=b} - \frac{1}{4\pi b^2} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{b - r_0\cos\gamma}{\sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\gamma}^3} - \frac{1}{b^2}\right)$$

得调和 Neumann – Green 函数 E 的一个积分表达式

$$E = E(r,\theta,\varphi;r_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{b}{4^2\pi^2}\int_0^{\pi}\sin\varphi_0 d\varphi_0 \times \int_0^{2\pi}\left(\frac{b - r_0\cos\gamma}{\sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\gamma}^3} - \frac{1}{b^2}\right) \times \left[2\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\gamma}} - 1\right) + \int_0^r \frac{1}{r}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\gamma}} - 1\right)dr\right]d\theta_0 \quad (17)$$

于是得球域 $r \leqslant b$ 的 Neumann – Green 函数为

$$G = G(r,\theta,\varphi;r_0,\theta_0,\varphi_0) = G_0(r,\theta,\varphi;r_0,\theta_0,\varphi_0) + E(r,\theta,\varphi;r_0,\theta_0,\varphi_0) = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2 + r_0^2 - 2rr_0\cos\gamma}} + \frac{b}{4^2\pi^2}\int_0^{\pi}\sin\varphi_0 d\varphi_0 \times \int_0^{2\pi}\left(\frac{b - r_0\cos\gamma}{\sqrt{b^2 + r_0^2 - 2br_0\cos\gamma}^3} - \frac{1}{b^2}\right) \times \left[2\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\gamma}} - 1\right) + \int_0^r \frac{1}{r}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2 - 2br\cos\gamma}} - 1\right)dr\right]d\theta_0 \quad (18)$$

其中

$$\cos\gamma = \cos\varphi_0\cos\varphi + sin\varphi_0 sin\varphi cos(\theta-\theta_0) = \cos\gamma_0$$

3 问题(1)解的积分表达式

问题(1)所对应的 Neumann - Green 函数表达式为式(18)。有

$$G(r_0,\theta_0,\varphi_0;r,\theta,\varphi)\big|_{r_0=b} = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2+r_0^2-2br_0\cos\gamma}} + \frac{b}{4^2\pi^2}\int_0^{\pi}\sin\varphi_0 d\varphi_0 \times \int_0^{2\pi}\left(\frac{b-r\cos\gamma}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\gamma}^3}-\frac{1}{b^2}\right)\left[2\left(\frac{1}{\sqrt{2-2\cos\gamma}}-1\right)+\int_0^b\frac{1}{r}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\gamma}}-1\right)dr\right]d\theta_0 \quad (19)$$

用引理 1 公式(5),得问题(1)解的积分表达式

$$u = u(r,\theta,\varphi) = -\iiint_{r_0\le b} f(r_0,\theta_0,\varphi_0)G(r_0,\theta_0,\varphi;r,\theta,\varphi_0)\times d\sigma_{(r_0,\theta_0,\varphi_0)} - \oiint_{r_0=b} g(\theta_0,\varphi_0)G(r_0,\theta_0,\varphi_0;r,\theta,\varphi)ds_{(r_0,\theta_0,\varphi_0)} + c_3 =$$

$$-\int_0^b r_0^2 dr_0\int_0^{2\pi}d\theta_0\int_0^{\pi}f(r_0,\theta_0,\varphi_0)\times \left\{\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos\gamma}}+\frac{b}{4^2\pi^2}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi \times \int_0^{2\pi}\left(\frac{b-r\cos\gamma}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\gamma}^3}-\frac{1}{b^2}\right)\times \left[2\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+r_0^2-2br_0\cos\gamma}}-1\right)+\int_0^{b}\frac{1}{r}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\gamma}}-1\right)dr\right]d\theta\right\}\times$$

$$\sin\varphi_0 d\varphi_0 - b^2\int_0^{2\pi}\sin\varphi_0 d\varphi_0\int_0^{\pi}g(\theta_0,\varphi_0)\times \left\{\frac{1}{4\pi}\frac{1}{\sqrt{b^2+r_0^2-2br_0\cos\gamma}}+\frac{b}{4^2\pi^2}\int_0^{\pi}\sin\varphi d\varphi \times \int_0^{2\pi}\left(\frac{b-r\cos\gamma}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\gamma}^3}-\frac{1}{b^2}\right)\times \left[2\left(\frac{1}{\sqrt{2-2\cos\gamma}}-1\right)+\int_0^b\frac{1}{r}\left(\frac{b}{\sqrt{b^2+r^2-2br\cos\gamma}}-1\right)dr\right]d\theta\right\}d\theta_0 \quad (20)$$

其中, $\cos\gamma$ 和式(10)相同。

参 考 文 献:

[1] 查中伟.数学物理偏微分方程[M].成都:西南交通大学出版社,2005.
[2] 王元明.数学物理方程与特殊函数[M].北京:高等教育出版社,2003.
[3] 郭时光.数学物理方程[M].成都:西南交通大学出版社,2005.
[4] 谷超豪,李大潜.数学物理方程[M].北京:人民教育出版社,1979.
[5] 郭玉翠.数学物理方法[M].北京:北京邮电大学出版社,2003.
[6] 梁昆淼.数学物理方法[M].北京:高等教育出版社,1979.
[7] 严正军.数学物理方程[M].合肥:中国科学技术大学出版社,1996.
[8] Guo Shiguang. The Minimal Polynomial of Element in the Innerproduct Model-Ring[J].数学季刊,1999,14(4):8-13.
[9] Guo Shiguang. Linear Factorization of λ-polynomial Over Quaternionic Field[J].数学季刊,2000,15(2):12-16.
[10] 郭时光.矩阵内积与奇异值不等式[J].工程数学学报,2001,18(1):123-126.
[11] 郭时光.环的代数封闭性[J].数学研究与评论,2002,22(4):639-646.

Solution to Poisson Equation Numann Problem of Integral Expression in Spherical Domain

GUO Shi-guang
(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract: Poisson equation Numann problem in Spherical Domain is researched. Taking the associated Legendre functions as a transition, through the mathematical deduction, a solutions to the problems of integral expression is obtained which can be applied to the analysis and calculation of electromagnetic vibrations.

Key words: spherical domain; Poisson equation; Numann problem; associated Legendre functions