

基于 Matlab 研究孤立波的非线性作用

王红梅, 季光明

(成都理工大学管理科学学院, 成都 610059)

摘要:孤立波在许多自然科学领域存在重要价值,它是推动非线性科学发展的重要概念之一,也是非线性发展方程的一种独特的现象。KdV 方程的提出也从理论上阐明了孤立波的存在。利用 Matlab 软件绘制孤立波图,分析图中孤立波的性质,并对比了消除 KdV 方程非线性项后绘制出来的线性方程的波图形,总结出了 KdV 方程的非线性项对于孤立波存在起着重要的作用。

关键词:孤立波;非线性;KdV 方程;Matlab

中图分类号:TP3

文献标识码:A

孤立波是一种在传播过程中形状、幅度和速度在一定区域都维持不变的脉冲状行波。孤立子是由偏微分方程描述的一种有特殊性质的有孤立波形状的解,其能量不会耗散。当两个或多个能量不同的孤立波在前进时,能量高的波会逐渐赶上并越过能量低的波而保持各自的波形^[1]。

从数学上看,它是某些非线性偏微分方程的一类稳定的、能量有限的解。KdV 方程即为此类非线性偏微分方程之一,它的提出从理论上阐明了孤立波的存在。

1 KdV 方程解 - 孤立子 Matlab 图形模拟

KdV 方程是三阶非线性偏微分方程,形式如下: $u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0$ 其中 u_t 、 u_x 、 u_{xxx} 分别为 $u(x,t)$ 的偏导数,在大量文献中,KdV 方程的精确解已经被研究。本文利用反散射法^[2](又称非线性 Fourier 变换方法)求解 KdV 方程初值问题。

1.1 KdV 方程的初值函数

$u_0(x) = -2\text{sech}^2 x$ 时可用反散射方法求得单孤子解

$$u = \varphi(x - at) = \frac{1}{2} \text{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{a}(x - at - \xi_0)\right) \quad (1)$$

1.2 KdV 方程的初值函数

$u_0(x) = -6\text{sech}^2 x$ 则可用反散射方法求得双孤立子解

$$u(x,t) = -12 \times \frac{3 + 4\cosh(8t - 2x) + \cosh(64t - 4x)}{(\cosh(36t - 3x) + 3\cosh(28t - x))^2} \quad (2)$$

对上述解(1)式和(2)式运用 Matlab 软件^[3]作图如图 1 所示。

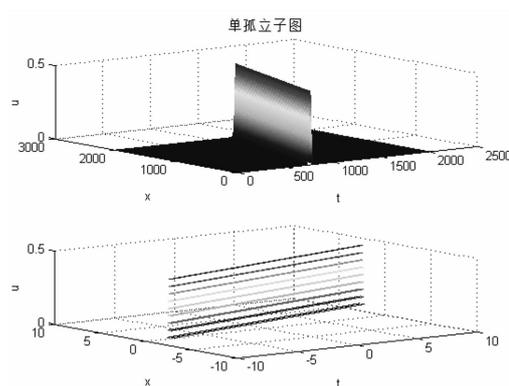


图 1 单孤子图及等高线

由图 1 可以看出孤立波具有光滑的波形,在传播的过程中孤立波的形状,振幅几乎保持不变,即传播时能量消减十分缓慢。孤立波是一个局域化的单个脉冲波包,它在一定局域累仅有一个波峰或波谷,普通波既有波峰又有波谷,此孤立波图仅有一个波峰,波长为无限,

随着时间(time)的推移,运动相对于时间及位置并不作周期性变化的波动。

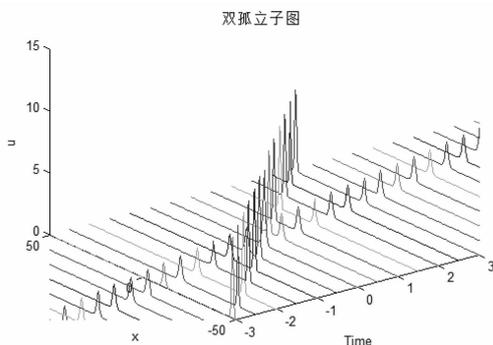


图2 双孤立子图

由图2可知孤立波仅有一个波峰且完全在 xut 坐标平面上方,能量的衰减也非常缓慢,即在相当长的时间其振幅,形状及速度未改变,长时间维持固有的形态一直下去,两列孤立波在碰撞后,能相互穿透且保持各自的形状、幅度和速度不变。并与物质粒子的弹性碰撞一样,遵循动量守恒和能量守恒。

2 线性化 KdV 求解及 Matlab 图形模拟

考虑线性化方程:

$$u_t + u_{xxx} = 0 \quad (3)$$

设 u 存在形如 $u = \varphi(\xi)$, $\xi = x - kt$ 的行波解^[4],且 $\xi \rightarrow \pm \infty$ 时, $\varphi(\xi) \rightarrow 0$ 。将 $\varphi(\xi)$ 代入 KdV 方程可化得常微分方程^[5]:

$$-k\varphi' + \varphi''' = 0 \quad (4)$$

其中 $\varphi' = \frac{d\varphi}{d\xi}$, 积分得:

$$-k\varphi + \varphi'' = c_1 \quad (5)$$

c_1 为积分常数。上式乘以 φ' 在积分之,得:

$$-\frac{1}{2}a\varphi^2 + \frac{1}{2}\varphi'^2 - c_1\varphi = c_2 \quad (6)$$

其中 c_2 亦为积分常数。利用条件 $\xi \rightarrow \pm \infty$ 时, $\varphi(\xi) \rightarrow 0$, 推得 $c_1 = c_2 = 0$, 上式变为:

$$\varphi'^2 = k\varphi^2 \quad (7)$$

$$\varphi'(\xi) = \pm \sqrt{k}\varphi \quad (8)$$

即

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = \pm \sqrt{k}\varphi \quad (9)$$

解得: $\varphi(\xi) = c \times e^{\pm\sqrt{k}\xi}$, c 为任意常数,即:

$$\varphi(\xi) = c \times e^{\pm\sqrt{k}(x-kt)} \quad (10)$$

由于方程是线性的,所以方程解的任意叠加依然为线性化的 KdV 方程解,即:

$$\varphi(\xi) = w_1 \times e^{\sqrt{k}\xi} + w_2 \times e^{-\sqrt{k}\xi} \quad (11)$$

为方程的解, w_1, w_2 为任意常数。

考虑其中一个波形解 $\varphi(\xi) = c \times e^{\sqrt{k}(x-kt)}$ 利用 Matlab 软件作图(图3)。

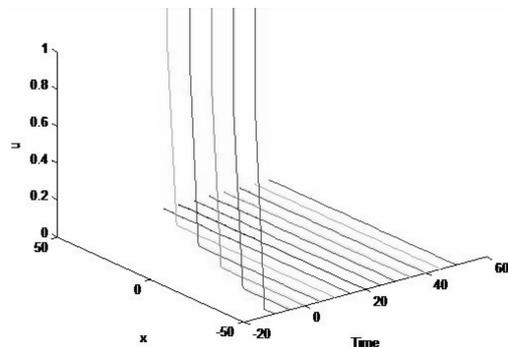


图3 线性化得 KdV 方程波图

对比图1和图2我们可以看出,该波形图随着时间的推移,波向前传播,波的振幅变化明显减小,即波在传播的过程中能量消减的很快,波峰也很快的消失了。由于色散项 u_{xxx} 的作用,波的各组成部分具有不同的频率,它们以不同的速度传播,行进一定距离之后,波形逐渐扩散而消失。

3 结束语

通过对比由 Matlab 软件绘制 KdV 方程线性项与非线性项的不同图形,可以直观清晰的了解到, KdV 方程的非线性项对于孤立波的存在起着重要的作用。

通常线性的波动方程具有行波解,时间和空间坐标不是各自独立的变量,而是以它们的线性组合作为变量,随着时间推移,波形向前传播,由于存在色散效应(色散即波的传播速度依赖于波的频率和波长,它导致波包散开),波的各组成部分具有不同的频率,它们以不同的速度传播,行进一定距离之后,波形逐渐扩散而消失。对于非线性波动方程,其中出现非线性项,非线性效应会使高频率不断积累,波在前进过程中变得越来越陡而最终达到破碎的地步,犹如岸边见到的白帽波破碎一样。当非线性项和色散项同时存在,两种效应恰能相互抵消,则出现孤立波解^[6]。

孤立波解只存在于非线性色散方程中,在 KdV 方程中,非线性项即为 uu_x , 色散项即为 u_{xxx} , 非线性与色散是孤立波存在的必要条件,色散即波的传播速度依赖于波

的频率和波长,它导致波包散开,而非线性却导致波包卷缩,两者共同作用的结果便形成稳定的波包,即孤立波。

参考文献:

- [1] 王振东.孤立波与孤立子[J].力学与实践,2005(27): 86-88.
- [2] W.艾克霍思,A.范哈顿.逆散射变换和孤立子理论[M].上海:上海科学技术文献出版社,1984.
- [3] 王健卫,曲中水,凌滨.MATLAB 7.X 程序设计[M].北京:中国水利水电出版社,2007.
- [4] 梁昆森,刘法,缪国庆.数学物理方法[M].北京:高等教育出版社,1998.
- [5] 王高雄,周之铭,朱思铭,等.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,2006.
- [6] 周守仁.孤立子理论的哲学和方法论问题[J].自然辩证法,1993(9):11-21.

Research on Non-linear Effects of Solitary Waves Based on Matlab

WANG Hong-mei, JI Guang-ming

(College of Management Science, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract: Solitary wave plays a major role in many natural sciences fields, which is one of important concepts of promoting the development of nonlinear science. It is also a unique phenomenon in development process of nonlinear equation. The existence of solitary wave is proved from the theoretical side of KdV equation. By using Matlab software to draw solitary wave map and to analyze its characters, the nonlinear of KdV equation is eliminated and its wave map is drawn to compare with solitary wave map, then a conclusion that the nonlinear of KdV equation play a major role for existence of the solitary wave map is summarized.

Key words: solitary wave; nonlinear; equation of KdV; matlab