

# 基于蚁群算法的多目标优化问题研究

孔翔宇<sup>1,2</sup>, 欧阳瑞<sup>1</sup>

(1. 周口师范学院数学与信息科学系, 河南 周口 466000; 2. 西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

**摘要:** 为保持所求得的多目标优化问题 Pareto 最优解的多样性, 文章提出了一种新的蚁群算法。选择策略采用多信息素权重, 信息素更新结合了局部信息素更新与全局信息素更新。其中, 全局信息素更新采用了两个最好解。此外, 通过在外部设置外部集来存储 Pareto 解, 并将改进的算法应用在双目标 TSP 上。最后进行了仿真实验, 结果表明新方法比 NSGA-II 和 SPEA2 更有效。

**关键词:** 多目标优化; 蚁群算法; 双目标 TSP

**中图分类号:** TP301.6

**文献标识码:** A

## 引言

多目标优化问题在许多领域是很常见的, 工程实践和科学研究中, 优化问题大多是多目标优化问题, 各目标之间通过决策变量相互制约, 对其中一个目标优化必须以其他目标为代价, 而且各目标的单位又往往不一致, 因此很难客观地评价多目标问题解的优劣性。多目标优化问题的求解不同于单目标优化问题。单目标优化问题的最优值只有一个, 多目标优化问题的解不是唯一的, 而是存在一个最优解集合, 集合中的元素称为 Pareto 最优或非劣最优。求解它们需要用不同于单目标优化的数学工具, 甚至最优的含义也发生变化。

传统解决多目标优化问题的算法, 一般是基于偏好给各个目标赋予一定权重, 将之转化为一个或一系列单目标问题。这类方法试图获得妥协解或者偏好解, 其缺点在于, 偏好和各目标的权重信息一般是难以确定的。另一类方法的目标是找出整个 Pareto 解集或者其近似, 由决策者从中选择。许多多目标优化问题的算法使用了启发式信息, 例如, 遗传算法, 模拟退火算法等。它们能够更有效地找到 Pareto 解。

蚁群优化也是一种启发式优化算法, 由意大利学者 Dorigo M 和其同事于 1991 年提出<sup>[1-2]</sup>的蚁群算法最初应用在旅行商问题上, 后来应用于许多困难的组合优化问题。比如: 二次分配问题, 车辆路径问题, 连续分组问题, 资源约束项目调度问题, 无限制调度问题, 路由网络

规划, 图着色, 调度问题等<sup>[3-11]</sup>。蚁群算法被实验证明在解决若干组合优化问题上卓有成效的。

本文采用多信息素权重的选择策略, 同时采用局部信息素更新与全局信息素更新相结合的方法, 在全局信息素更新时采用两个最好解进行更新, 同时在外部设置外部集用来存储 Pareto 解, 将改进的算法应用在双目标 TSP 上, 与 NSGA-II 和 SPEA2 进行仿真实验比较。实验结果验证了新方法的有效性。

## 1 多目标 TSP

单目标 TSP 的简单描述如下: 给定  $n$  个城市, 有一个旅行商从某一城市出发, 访问各个城市且只有一次后再回到原出发城市, 要求找到一条最短的巡回路径。它用数学语言可以描述如下: 设  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  为  $n$  个城市的集合,  $L = \{l_{ij} \mid c_i, c_j \in C\}$  是  $C$  中元素两两连接的集合,  $d_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, n)$  是  $l_{ij}$  的 Euclidean 距离, 即  $d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ ,  $G = (C, L)$  是一个图, TSP 的目的是从中找出长度最短的哈密顿圈, 既是找出对  $C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  中每个城市访问且只访问一次的最短的一条封闭曲线。引入决策变量:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{旅行商访问城市 } i \text{ 后访问城市 } j \\ 0 & \text{其它} \end{cases} \quad (1)$$

则 TSP 的目标函数为:

$$\min Z = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} d_{ij} \quad (2)$$

收稿日期: 2010-03-18

基金项目: 周口师范学院青年基金 (ZKNUQN200909)

作者简介: 孔翔宇 (1982-), 男, 吉林长春人, 助教, 硕士生, 主要从事最优化理论与智能算法方面的研究。

实际问题中常常需要同时考虑: 路程最短, 时间最少, 费用最省, 风险最小等等多方面的因素, 即, 城市之间的权重属性有多个. 因此, 研究多目标 TSP<sup>[9]</sup>就具有很强的实际意义. 毫无疑问, 这种多目标的组合优化问题难于求解, 比之单目标的问题更为复杂, 国内外的研究亦极为稀少, 尤其缺乏实用算法, 由于此时的解是一种“折中解”, “非劣解”, 因此, 多目标 TSP 解的含义可定义为: 假定有一回路解  $H$ , 若不存在任何其它回路解  $Q$ , 使得  $Z_r(Q) \leq Z_r(H), r = 1, 2, \dots, L$ , 其中至少有一个不等式严格成立 ( $Z_r$  为相应的目标函数值), 则  $H$  为一个非劣解或 Pareto 解.

## 2 多目标蚁群算法

### 2.1 基本蚁群算法

蚁群算法是求解 TSP 问题诸多算法中取得较好性能的一种启发式算法, 其中蚁群系统 (ACS) 是蚁群算法中具有代表性的算法, 具体描述如下:

(1) 初始化: 初始时刻, 设定最大代数  $\max GEN$ , 蚂蚁数  $m$ ,  $GEN = 0$

(2) 起始点: 将  $m$  只蚂蚁分别随机地置于各顶点处.

(3) 构造解: 蚂蚁  $k (k = 1, 2, \dots, m)$  按照伪随机比例规则选择下一步要转移的城市, 在  $t$  时刻, 位于城市  $i$  的蚂蚁  $k$  选择城市  $j$  的规则为:

$$s = \begin{cases} \arg \max \{ \tau_{ij} / \eta_{ij}^\beta \}, & \text{if } q \leq q_0 \\ S, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3)$$

其中  $q$  是分布在区间  $[0, 1]$  上的一个随机变量,  $q_0$  是一个参数,  $S$  是由下式给出的概率分布产生出来的一个随机变量:

$$P_{ij}^k = \begin{cases} \frac{\tau_{ij}^\alpha(t) \eta_{ij}^\beta(t)}{\sum_{s \in allowed_k} \tau_{is}^\alpha(t) \eta_{is}^\beta(t)}, & j \in allowed_k \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (4)$$

其中  $\tau_{ij}$  为边  $(i, j)$  的信息素量,  $\eta_{ij}$  为从城市  $i$  转移到城市  $j$  的启发式信息,  $\alpha$  和  $\beta$  是两个参数,  $allowed_k$  为蚂蚁  $k$  下一步允许访问的城市的集合.

(4) 应用局部信息素更新规则来改变信息素值: 蚂蚁  $k$  对其走过的每条弧用

$$\tau(r, s) = (1 - \rho) \tau(r, s) + \rho \tau_0 \quad (5)$$

局部信息素更新规则来改变弧上关联的信息素值, 其中  $0 < \rho < 1$  是信息素挥发参数;  $\tau_0 = (n \ln n)^{-1}$ ,  $L_m$  是最近邻域启发算法产生的路线长度;  $n$  为城市数.

(5) 若所有的  $m$  个蚂蚁都构造完解, 则转 (6), 否则转 (3).

(6) 全局更新信息素值: 应用全局信息素更新规则来改变信息素值. 当所有  $m$  个蚂蚁生成了  $m$  个解, 其中有一条最短路径是本代最优解, 将属于这条线路上的所有弧相关联的信息素值更新:

$$\tau(r, s) = (1 - \xi) \tau(r, s) + \xi \Delta \tau(r, s) \quad (6)$$

其中  $0 < \xi < 1$  是挥发参数,

$$\Delta \tau(r, s) = \begin{cases} \frac{1}{L_{gb}}, & \forall (r, s) \in L_{gb} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (7)$$

$L_{gb}$  是到目前得到的全局最优解的路线长度.

(7) 终止: 若终止条件满足, 则结束; 否则  $GEN = GEN + 1$ , 转 (2) 进行下一代进化, 终止条件可以指定进化的代数, 也可以限定运行时间, 或设定最短路径长的下限.

### 2.2 多目标蚁群算法

多目标蚁群算法的思想是: 根据目标函数的数目将蚂蚁分成若干子群体, 为每个子群体分配一个目标函数, 在其他子群体优化结果的基础上通过 Pareto 过滤器来获得均衡解. 我们以经典的 ACS 算法为基础做如下变化, 得到多目标蚁群算法.

(1) 转移概率: 对每一个目标  $k$  需要考虑一些信息素轨迹  $\tau^k$ , 在算法的每一代中, 每一只蚂蚁都计算一组权重  $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ , 并且同时使用信息素轨迹和启发式信息. 蚂蚁在选择下一个访问节点时使用下面  $k$  个信息素轨迹的 ACS 转移规则:

$$j = \begin{cases} \arg \max_{j \in \Omega} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \tau_{ij}^k \right]^\alpha \eta_{ij}^\beta, & \text{if } q \leq q_0 \\ S, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

其中,  $k$  是多目标的数量,  $\eta_{ij}$  是启发式信息, 代表边  $a_{ij}$  的吸引力, 通常取为边长的倒数,  $S$  是由下式给出的概率分布产生出来的一个随机变量.

$$P(j) = \begin{cases} \frac{\left[ \sum_{k=1}^K p_k \tau_{ij}^k \right]^\alpha \eta_{ij}^\beta}{\sum_{u \in \Omega} \left[ \sum_{k=1}^K p_k \tau_{iu}^k \right]^\alpha \eta_{iu}^\beta}, & \text{if } j \in \Omega \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (9)$$

(2) 局部信息素更新: 当每只蚂蚁走完边  $a_{ij}$  之后, 对每个目标  $k$  我们采取更新:

$$\tau_{ij}^k = (1 - \rho) \tau_{ij}^k + \rho \tau_0 \quad (10)$$

其中,  $\rho$  是信息素挥发速率,  $\tau_0$  是初始信息素的值.

(3) 全局信息素更新: 对每个目标  $k$ , 在当前代只对产生最好和第二好的解进行信息素更新, 使用规则如下:

$$\tau_{ij}^k = (1 - \rho) \tau_{ij}^k + \rho \Delta \tau_{ij}^k \quad (11)$$

这里  $\Delta \tau_{ij}^k$  为:

$$\Delta \tau_{ij}^k = \begin{cases} Q_1, & \text{if } a_{ij} \in \text{best solution} \\ Q_2, & \text{if } a_{ij} \in \text{second - best solution} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (12)$$

这里  $Q_1, Q_2$  为常数, 且  $Q_1 > Q_2$ .

(4) 设置 pareto 解集过滤器: 设置 pareto 解集过滤

器,用来存放算法运行时产生的 Pareto解.对于不违反约束的解,如果该解支配过滤器中某个解,则把该解加入到过滤器中,同时剔除那个支配解;如果过滤器中某个解支配该解,则不对过滤器进行操作;否则,则把该解加入到过滤器中。

过滤器的大小可以事先设定,在向其中加入解时,同时进行划分操作,其思想是在个体子目标函数空间,划分若干子空间,这样每个子空间都包含一些解.当过滤器中解的数目超出预定大小时,选择一个包含解数最多的子空间,从中随机剔除一个解,目的是维持解的多样性,使解尽可能均匀分布。

### 3 算法实验及仿真

本文选用国际上公布的双目标 TSP库中的 6组算例: Kroab5Q Krocd5Q Kroab10Q Kroad10Q Krobc10Q Krocd10Q(算例中的 5Q 100 代表算例的规模为 5Q 100),通过大量计算,得到了较好的结果。

将该算法与 NSGA-II和 SPEA2进行仿真实验比较.各算法分别循环运行 10次,得到结果如图 1至图 6所示,图中横坐标为第一个目标函数值  $f_1$ ,纵坐标为第二个目标函数值  $f_2$ ,其中 NSGA-II用\* 来记录, SPEA2用来记录,改进的蚁群算法用 O来记录。

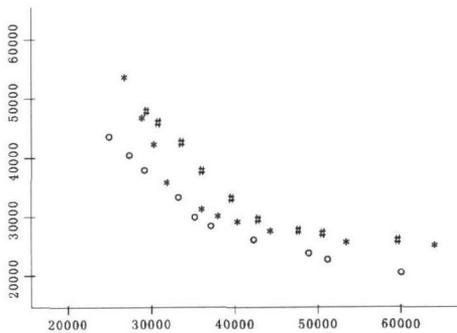


图 1 Kroab50 Pareto 解

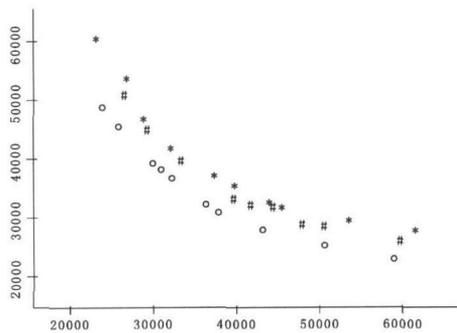


图 2 krocd50 Pareto 解

在图 1和图 2这两组数据实验结果中,基于 Pareto概念的多目标蚁群算法的求解效果一般,较优解分布比较稀疏,和 NSGA-II和 SPEA2相比较,效果没有明显差别.图 3图 4图 5图 6这四组数据实验结果中,基于

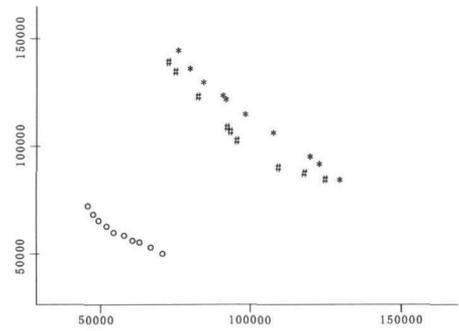


图 3 kroab100 Pareto 解

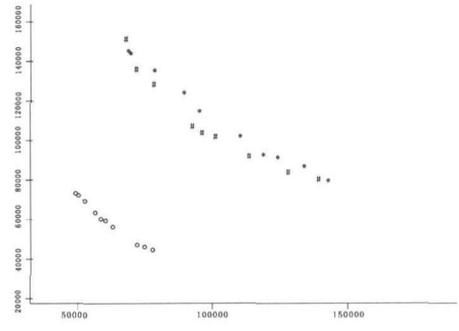


图 4 kroad100 Pareto 解

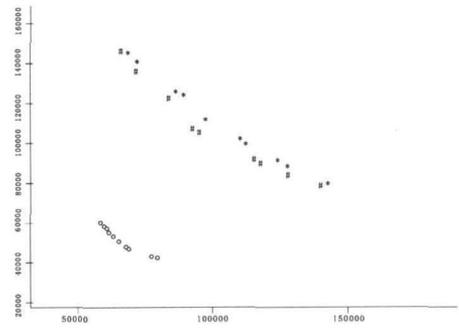


图 5 krocd100 Pareto 解

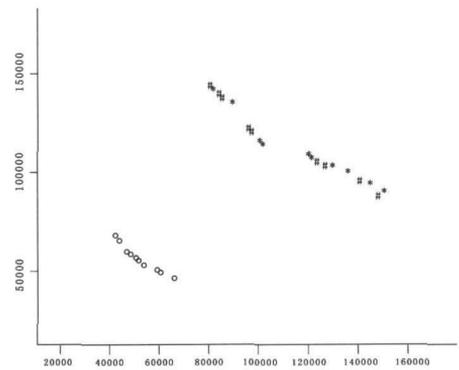


图 6 krobc100 Pareto 解

Pareto概念的多目标蚁群算法的求解效果比较明显,较优解分布比较稠密,形成了一个明显的 Pareto前沿,且 Pareto概念的多目标蚁群算法的 Pareto前沿解集明显比 NSGA-II和 SPEA2的 Pareto前沿解集好。

#### 4 结束语

蚁群算法是一种新的解决复杂组合优化问题的启发式算法。本文提出了一种多信息素权重和信息素更新相结合的改进算法, 实验证明, 该算法与 NSGA-II 和 SPEA2 进行仿真实验比较, 能获得更好的 Pareto 前沿, 改进算法比 NSGA-II 和 SPEA2 在双目标 TSP 中更为有效。进一步的研究可将改进的多目标蚁群优化算法用在更复杂的多目标组合优化问题中。

#### 参考文献:

- [1] Colomi A, Dorigo M, Maniezzo V, et al Distributed optimization by ant colonies[C]. Proceedings of European Conference on Artificial Life 1991, 134-142
- [2] Dorigo M, Maniezzo V, Colomi A. The ant system: optimization by a colony of cooperating agents[J]. IEEE Transactions on Systems Man and Cybernetics-Part B (S1083-4419), 1996, 26(1): 29-41.
- [3] Dorigo M, Cao G D, Gambardella L M. Ant algorithms for discrete optimization[J]. Artificial Life 1999(2): 137-72
- [4] Dorigo M, Stutzle T. Ant colony optimization[M]. MIT

- Press Cambridge MA, 2004
- [5] Dorigo M, Cao G D. Ant colony optimization: A new metaheuristic[C]. Proc Of the 1999 Congress on Evolutionary Computation, 1999 (2): 1470-1477.
- [6] Dorigo M, Gambardella L M. Ant colony system: a cooperative learning approach to the traveling salesman problem [J]. IEEE Trans on Evolutionary Computation, 1997(1): 53-66
- [7] 刘康, 余玲. 蚁群算法及其连续优化算法初析[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2004, 17(1): 42-46
- [8] 何丽, 游中胜. 基于蚁群寻路的图像分割算法[J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(3): 76-78
- [9] Jaskiewicz A. Genetic local search for multiobjective combinatorial optimization [C]. European Journal of Operational Research, 2002 (1): 50-57.
- [10] 张勇德, 黄莎白. 多目标优化问题的蚁群算法研究[J]. 控制与决策, 2005, 23(2): 170-173, 178
- [11] 游道明, 陈坚. 用蚂蚁算法解决多目标 TSP 问题[J]. 小型微型计算机系统, 2003 (10): 1808-1811

### Multiobjective Optimization Based on Ant Colony Algorithm

KONG Xiang-yu<sup>1,2</sup>, OUYANG Rui<sup>1</sup>

(1. Department of Mathematics and Information Science, Zhoukou Normal University, Zhoukou 466000, China

2. College of Science, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract** In order to preserve the diversity of Pareto optimal solutions in multiobjective optimization problems, A new ant colony algorithm is proposed. In the proposed algorithm, the selection strategy is multi-pheromone weighted and pheromone update uses the combination of the local and global pheromone update. Especially, the global pheromone update adopts the best solution and the second-best solution. In addition, an external set is set up outside to store the Pareto solution, and the improved algorithm is used to solve the bi-criteria TSP. The experiment show that the new algorithm is more efficient than SPEA2 and NSGA-II.

**Key words** multiple objective optimization; ant colony optimization; bi-criteria TSP