

半 B - (E, F) - 凸约束单目标规划的最优性条件

马晓娜

(宿州学院应用数学系, 安徽 宿州 234000)

摘要: 广义凸性和凸性在数学规划最优化理论以及最优化控制等很多数学领域中具有十分重要的作用, 但凸性的局限性也是很显然的。可以说对于凸性和广义凸性的研究是数学规划的主要方向。基于 B-凸性和半 (E, F)-凸性, 提出了一类新的广义凸性: 半 B-(E, F)-凸性, 给出了半 B-(E, F)-凸函数的概念, 利用半 B-(E, F)-凸函数的有关性质讨论了半 B-(E, F)-凸函数单目标规划的最优性条件。

关键词: 半 B-(E, F)-凸函数; 半 B-(E, F)-凸规划; 最优性条件

中图分类号: 0221.2

文献标识码: A

引 言

Bector 等人提出的 B-凸函数、广义的 B-凸函数以及此后对 B-函数类的研究见文献 [1-3], 1999 年, E A Youness 通过弱化凸集与凸函数定义条件, 引入了 E-凸集和 E-凸函数, 得出了 E-凸集和 E-凸函数的许多性质。作为对凸规划的推广, Youness 还提出 E-凸规划问题, 并且讨论了 E-凸函数在 E-凸规划中的应用^[4]。后来, Xinmin - Yang Xiusu - Chen 和 Jinbao - Jian 分别用反例说明文献 [4] 中一些结论不正确^[5-7], 并且 Chen 纠正了部分错误结论, 还引入了 (严格) 半 E-凸函数、(严格) 拟半 E-凸函数和 (严格) 伪半 E-凸函数等概念, 讨论了它们在 E-凸规划中的应用^[5]。

1 预备知识

定义 1^[8] 集合 M 称为 (E, F)-凸集, 如果存在点到集的映射 $E, F: M \rightarrow R^n$, 使得 $\lambda E(x) + (1 - \lambda)F(y) \in M, \forall x, y \in M, \forall \lambda \in [0, 1]$ 。

定义 2^[9] 函数 $f: M \rightarrow R$ 称为 M 上的半 (E, F)-凸函数, 如果存在点到集的映射 $E, F: M \rightarrow R^n$, 使得 M 是 (E, F)-凸集, 而且

$$f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)F(y)) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

$$\forall x, y \in M, \bar{x} \in E(x), \forall \bar{y} \in F(y), \lambda \in [0, 1]$$

定义 3^[10] 函数 $f: X \rightarrow R$ 称为 $X \subseteq R^n$ 上的 B-凸函数, 如果存在函数 $b(x, u, \lambda): X \times X \times [0, 1] \rightarrow R$ 使得 $f[\lambda x + (1 - \lambda)u] \leq \lambda b(x, u, \lambda)f(x) + [1 - \lambda b(x, u, \lambda)]f(u)$
 $\forall x \in X, \lambda \in [0, 1]$

定义 4 函数 $f: M \rightarrow R$ 称为 M 上的半 B-(E, F)-凸函数, 如果存在点到集的映射 $E, F: M \rightarrow R^n$, 使得 M 是 (E, F)-凸集, 且存在函数 $b(x, y, \lambda): M \times M \times [0, 1] \rightarrow R$, 使得函数 f 满足 $f[\lambda \bar{x} + (1 - \lambda)\bar{y}] \leq \lambda b(x, y, \lambda)f(x) + (1 - \lambda b(x, y, \lambda))f(y) \forall x, y \in M, \forall \bar{x} \in E(x), \forall \bar{y} \in F(y), \lambda \in [0, 1]$ 。

在本文中, 我们考虑如下具有不等式约束的非线性规划问题, 记为 (NP)

$$(NP) \quad \begin{cases} \min & f(x) \\ \text{s.t.} & \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ x \in R^n \end{cases} \end{cases}$$

其中 $g(x) = [g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)]^T$ 。

在问题 (NP) 中, 满足约束条件的所有解的集合称为可行域, 我们记 X 为 (NP) 可行域, 即有 $X = \{x \in R^n \mid g_i(x) \leq 0 \ i = 1, 2, \dots, m\}$, f, g_i 均为 X 上的可微函数。

如果 $x \in X$, 那么记指标集为:

$$I = I(x) = \{x \in R^n \mid g_i(x) = 0 \ 1 \leq i \leq m\}$$

$$J = J(x) = \{x \in R^n \mid g_i(x) < 0 \quad 1 \leq i \leq m\}$$

$$I \cup J = \{1, 2, \dots, m\}$$

定义 5 在问题 (NP) 中, 如果存在点到集的映射 $E, F: X \rightarrow R^n$ 及函数 $b(x, y, \lambda) \geq 0$ 使得 X 为 $(E, F) -$ 凸集, 且使 f, g_i 为 X 上的半 $B - (E, F) -$ 凸函数, 则称规划问题 (NP) 为半 $B - (E, F) -$ 凸规划。

2 半 $B - (E, F) -$ 凸约束单目标规划的最优性条件

引理 1 设 $f(x)$ 是 $(E, F) -$ 凸集 X 上关于函数 b 的连续可微的半 $B - (E, F) -$ 凸函数, 如果对 $\forall x, y \in X, x \in E(x) \cup F(x), y \in E(y) \cup F(y)$, 存在函数 $\bar{b}: X \times X \rightarrow R^+$, 记 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} b(x, y, \lambda) = \bar{b}(x, y)$, 则有

$$\nabla f(F(y))^T (E(x) - F(y)) \leq \bar{b}(x, y) [f(x) - f(y)]$$

证明 因 $f(x)$ 是 X 上的半 $B - (E, F) -$ 凸函数, 因此有

$$f(\lambda E(x) + (1 - \lambda)F(y)) <$$

$$\lambda b(x, y, \lambda)f(x) + (1 - \lambda)b(x, y, \lambda)f(y) =$$

$$f(y) + \lambda b(x, y, \lambda)[f(x) - f(y)]$$

函数 $f(x)$ 连续可微, 由微分中值定理得

$$f(F(y) + \lambda(E(x) - F(y))) = f(F(y)) +$$

$$\nabla f(F(y) + \lambda\theta(E(x) - F(y)))^T \lambda(E(x) - F(y)) <$$

$$f(y) + \lambda b(x, y, \lambda)[f(x) - f(y)] =$$

$$f(F(y)) + \lambda b(x, y, \lambda)[f(x) - f(y)] \quad 0 < \theta \leq 1$$

所以

$$\nabla f(F(y) + \lambda\theta(E(x) - F(y)))^T (E(x) - F(y)) \leq$$

$$b(x, y, \lambda)[f(x) - f(y)]$$

将式两边分别取当 $\lambda \rightarrow 0$ 时的极限, 由引理 1 条件可得

$$\nabla f(F(y))^T (E(x) - F(y)) \leq$$

$$\bar{b}(x, y) [f(x) - f(y)]$$

引理 2 设 $f(x)$ 是 $(E, F) -$ 凸集 X 上关于函数 b 的连续可微的半 $B - (E, F) -$ 凸函数, 如果对 $\forall x, y \in X, x \in E(x) \cup F(x), y \in E(y) \cup F(y)$, 存在函数 $\bar{b}: X \times X \rightarrow R^+$, 记 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} b(x, y, \lambda) = \bar{b}(x, y), \frac{E(x) - F(y)}{b(x, y)} = \varphi(x, y)$, 则有 $f(x) - f(y) \geq \varphi(x, y) \nabla f(F(y))$ 利用引理 1 的结论得证。

引理 3 设 $f(x)$ 是 $(E, F) -$ 凸集 X 上关于函数 b 的连续可微的半 $B - (E, F) -$ 凸函数, 对 $\forall x \in X$, 有 $x \in E(x) \cup F(x)$, 且存在函数 $\bar{b}: X \times X \rightarrow R^+$, 记 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} b(x, y, \lambda) = \bar{b}(x, y)$, 那么:

(1) 如果 $x \in E(x)$, 则对 $\forall y \in X, \forall \bar{y} \in F(y)$, 有 $\nabla f(x)^T (\bar{y} - x) \leq \bar{b}(x, y) [f(y) - f(x)]$

(2) 如果 $x \in F(x)$, 则对 $\forall y \in X, \forall \bar{y} \in E(y)$, 有

$$\nabla f(x)^T (\bar{y} - x) \leq \bar{b}(x, y) [f(y) - f(x)]$$

证明 因为 $x \in E(x)$, 则对 $\forall y \in X, \forall \bar{y} \in F(y)$ 及 $\lambda \in [0, 1]$, 有 $\lambda E(x) + (1 - \lambda)F(y) \in X$, 即 $\lambda x + (1 - \lambda)\bar{y} \in X$, $f(x)$ 是 X 上的半 $B - (E, F) -$ 凸数, 故有

$$f[\lambda x + (1 - \lambda)\bar{y}] = f[(1 - \lambda)\bar{y} + (1 - (1 - \lambda))x] \leq$$

$$(1 - \lambda)b(x, y, 1 - \lambda)f(y) + [1 - (1 - \lambda)]b(x, y, 1 - \lambda)f(x) =$$

$$f(x) + (1 - \lambda)b(x, y, \lambda)[f(y) - f(x)]$$

即有

$$\frac{f[\lambda x + (1 - \lambda)(\bar{y} - x)] - f(x)}{(1 - \lambda)(\bar{y} - x)} (1 - \lambda)(\bar{y} - x) \leq$$

$$(1 - \lambda)b(x, y, 1 - \lambda)[f(y) - f(x)]$$

式两边分别取当 $1 - \lambda \rightarrow 0$ 时的极限, 则有

$$\nabla f(x)^T (\bar{y} - x) \leq \bar{b}(x, y) [f(y) - f(x)]$$

(2) 的证明同 (1) 的证明, 略。

定理 1 如果函数 $f(x)$ 是 $(E, F) -$ 凸集 X 上关于函数 b 的连续可微的半 $B - (E, F) -$ 凸函数, 对 $x^* \in X$, 有 $x^* \in E(x^*) \cup F(x^*)$, 且存在函数 $\bar{b}: X \times X \rightarrow R^+$, 其中 $\lim_{\lambda \rightarrow 0} b(x, y, \lambda) = \bar{b}(x, y)$, 则 x^* 为半 $B - (E, F) -$ 凸规划 (NP) 的最优解的充要条件是:

(1) 如果 $x^* \in E(x^*)$, 则对 $\forall y \in X, \forall \bar{y} \in F(y)$, 有 $\nabla f(x^*)^T (\bar{y} - x^*) \geq 0$

(2) 如果 $x^* \in F(x^*)$, 则对 $\forall y \in X, \forall \bar{y} \in E(y)$, 有 $\nabla f(x^*)^T (\bar{y} - x^*) \geq 0$

证明 (1) 充分性 设 $x^* \in X$ 为规划问题的最优解, X 为 $(E, F) -$ 凸集, 故对 $\forall y \in X, \forall \bar{y} \in E(y)$ 及 $\lambda \in [0, 1]$, 有 $\lambda E(x^*) + (1 - \lambda)F(y) \in X$, 即 $\lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{y} \in X$, 所以

$$f(x^*) \leq f[\lambda F(y) + (1 - \lambda)E(x^*)] =$$

$$f[E(x^*) + \lambda(F(y) - E(x^*))] =$$

$$f[x^* + \lambda(\bar{y} - x^*)] =$$

$$f(x^*) + \lambda \nabla f(x^*)^T (\bar{y} - x^*) + o(\lambda)$$

两边分别取当 $\lambda \rightarrow 0$ 时的极限, 则有

$$\nabla f(x^*)^T (\bar{y} - x^*) \geq 0$$

必要性 对于 $x^* \in X$ 且 $x^* \in E(x)$, 则对于 $\forall y \in X, \forall \bar{y} \in F(y)$ 及 $\lambda \in [0, 1]$, 有 $\lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{y} \in X$, 而 $f(x)$ 是 X 上的半 $B - (E, F) -$ 凸函数, 故有

$$f[\lambda x^* + (1 - \lambda)\bar{y}] \leq \lambda b(x^*, y, \lambda)f(x^*) +$$

$$[1 - \lambda b(x^*, y, \lambda)]f(y)$$

由引理 3 (1) 可得 $\nabla f(x^*)^T (\bar{y} - x^*) \leq \bar{b}(x^*, y) [f(y) - f(x^*)]$ 又因为 $\nabla f(x^*)^T (\bar{y} - x^*) \geq 0$ 则有 $\bar{b}(x^*, y) [f(y) - f(x^*)] \geq 0$ 而 $\bar{b}(x^*, y) \geq 0$ 所以 $f(y) \geq f(x^*)$, 从而 x^* 为半 $B - (E, F) -$ 凸规划 (NP) 的最优解。

(2)中 $x^* \in F(x^*)$ 的情况同理可证, 略。

定理 2^[11] (Fritz John 最优性必要条件) 设 x^0 是问题 (NP) 的有效解, 则 $\exists \lambda_0 \geq 0 \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \geq 0$ 使得结论 (1) $\lambda_0 \nabla f(x^0) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^0) = 0$ (2) $u_i g_i(x^0) - u_i g_i(x^*)$, 成立。

定理 3 (最优性充分条件) 设 $f(x), g(x)$ 是 (E, F) -凸集 X 上关于同一函数 b 的可微半 $B - (E, F)$ -凸函数, 若 x^* 是问题 (NP) 的可行解, 且 $x^* \in E(x^*) \cup F(x^*)$, 则 $\exists \lambda_0 > 0$ 及 $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \geq 0$ 使得定理 2 中的条件成立, 则有:

$$(1) \lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

$$(2) g(x^*) \leq 0$$

$$(3) u g(x^*) = 0$$

$$(4) (\lambda_0, u) \geq 0 \text{ 但不全为 } 0$$

则 x^* 是问题 (NP) 的最优解。

证明 反证法

假设 x^* 不是 (NP) 问题的最优解, 则必存在可行解 $x^0 (x^0 \neq x^*)$ 为 (NP) 问题的最优解, 那么有 $f(x^0) < f(x^*)$, f, g_i 均为半 $B - (E, F)$ -凸的, 由引理 2 有

$$f(x^0) - f(x^*) \geq \varphi(x^0, x^*) \nabla f(F(x^*))$$

其中

$$\frac{E(x^0) - F(x^*)}{b(x^0, x^*)} = \varphi(x^0, x^*)$$

$$u_i g_i(x^0) - u_i g_i(x^*) \geq \varphi(x^0, x^*) u_i \nabla g_i(F(x^*))$$

其中

$$\varphi_i(x^0, x^*) = \frac{E(x^0) - F(x^*)}{b_i(x^0, x^*)} = \varphi(x^0, x^*)$$

所以

$$\sum_{i=1}^m u_i g_i(x^0) - \sum_{i=1}^m u_i g_i(x^*) \geq$$

$$\varphi(x^0, x^*) \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(F(x^*))$$

由于 x^0 为 (NP) 问题的可行解及 (3), 那么有

$$\sum_{i=1}^m u_i g_i(x^0) \leq 0 = \sum_{i=1}^m u_i g_i(x^*)$$
 又因为 $x^* \in E(x^*) \cup F(x^*)$, $x^0 \in E(x^0) \cup F(x^0)$ 从而有

$$\varphi(x^0, x^*) \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^*) \leq 0 \tag{1}$$

由引理 3 及条件 (1) 得

$$\varphi(x^0, x^*) \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^*) = -\varphi(x^0, x^*) \lambda_0 \nabla f(x^*) \geq$$

$$\lambda_0 (f(x^*) - f(x^0))$$

由式 (1) 及 $\lambda_0 > 0$ 则有

$$f(x^*) - f(x^0) \leq 0$$

这与 x^0 为 (NP) 问题的最优解矛盾, 从而 x^* 为 (NP) 问题的最优解。

定理 4 (最优性充分条件) 设 $f(x), g_i(x) (i \in I)$ 分别是 (E, F) -凸集 X 上关于同一函数 b 的可微半 $B - (E, F)$ -凸函数, 若 x^* 是问题 (NP) 的可行解, 且 $x^* \in E(x^*) \cup F(x^*)$, 则存在 $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \geq 0$ 使得定理 2 中的条件成立, 则 x^* 是问题 (NP) 的最优解。

证明 由 I, J 的定义

$$I = I(x) = \{x \in R^n \mid g_i(x) = 0 \quad 1 \leq i \leq m\}$$

$$J = J(x) = \{x \in R^n \mid g_i(x) < 0 \quad 1 \leq i \leq m\}$$

$$I \cup J = \{1, 2, \dots, m\}$$

及定理 2 中的条件有 $\sum_{i=1}^m u_i g_i(x^*) = 0$ 因此, $u_i = 0 (i \in J)$, 因此对 $\forall x \in X (x \neq x^*)$, 有 $g_i(x) < 0 = g_i(x^*) (i \in J)$, 而 $g_i(x) (i \in I)$ 为 X 上的半 $B - (E, F)$ -凸函数及引理 2 有 $\varphi(x, x^*) \nabla g_i(x^*) \leq 0 (i \in I)$, 又由于 $u \geq 0$ 及 $u_i = 0 (i \in J)$, 则有 $\varphi(x, x^*) u \nabla g_i(x^*) \leq 0$ 而 x^* 满足定理 2 中条件

$$\lambda_0 \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^m u_i \nabla g_i(x^*) = 0$$

即

$$\nabla f(x^*) + \sum \frac{u_i}{\lambda_0} \nabla g_i(x^*) = 0$$

令

$$u_i^0 = \frac{u_i}{\lambda_0} (i = 1, 2, \dots, m)$$

从而有 $\varphi(x, x^*) f(x^*) \geq 0$ 而 f 为 X 上的半 $B - (E, F)$ -凸函数, 因此得 $f(x) \geq f(x^*)$, 所以 x^* 是问题 (NP) 的最优解。

参考文献:

[1] Chen S L, Zhou W, Ji X M. A class of B-sem preinvex functions[J]. Journal of Southwest University for Nationalities 2005, 31(2): 173-176.

[2] Bector C R, Singh C. B-vex function[J]. Journal of Optimization Theory and Applications 1991, 71: 237-253

[3] Suneja S K, Bector C R, Lalithad C S. Generalization B-vex Functions and B-vex programming[J]. Journal of Optimization Theory and Applications 1991, 76: 560-576.

[4] Thompson T. S-closed spaces[J]. Proc Amer Math Soc 1976, 60: 335-338

[5] 王国俊. S-闭空间的性质[J]. 数学学报, 1981, 1(24): 55-63

[6] 陈必胜. 仿 S-闭空间[J]. 数学研究与评论, 1985, 3(5): 1-5

- [7] 马跃超. 可数 S -闭空间及可数仿 S -闭空间 [J]. 烟台师范学院学报, 1994, 12(4): 245-248
- [8] Youness E A. E -convex sets, E -convex functions and E -convex programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications 1999, 102(2): 439-450
- [9] Jian J B. On (E, F) -generalized convexity [J]. International Journal of Mathematical sciences 2003, 2(1): 121-132
- [10] Bector C R, Singh C. B -vex function [J]. Journal of Optimization Theory and Applications 1991, 71: 237-253
- [11] 史树中. 凸分析 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990

Semi $B - (E, F)$ -convex Constrained Single-objective Programming of Optimal Conditions

MA Xiao-na

(Department of Applied Mathematics, Suzhou University, Suzhou 234000, China)

Abstract Convexity and generalized convexity in the convexity of mathematical programming optimization theory, optimization control and many other areas of mathematics plays an important role, but the limitations of convexity are also very obvious. This paper generalized two kinds of convex functions: B -convex function and semi (E, F) -convex function are researched furtherly. A new kind of generalized convexity: semi $B - (E, F)$ -convexity is introduced, semi $B - (E, F)$ -convex function and its generalized convexity are introduced. This paper presents the optimal conditions of single-objective programming for semi $B - (E, F)$ -convexity functions using properties of semi $B - (E, F)$ -convexity functions.

Key words semi $B - (E, F)$ -convex function, semi (E, F) -convex programming, optimality conditions

(上接第 279 页)

Estimate of Exponential Distribution Parameter Under Entropy Loss Function

LI Jun-hua, ZHONG Tai-yong

(Department of Mathematics, Yunyang Teacher's College, Danjiangkou 442700, China)

Abstract In this paper, provide that the prior distribution of exponential parameter distribution is Gamma distribution, the expected Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation under Entropy Loss function were given out.

Key words exponential distribution, entropy loss function, expected Bayesian estimation, hierarchical Bayesian estimation