

熵损失函数下指数分布参数的估计

李俊华, 钟太勇

(鄱阳师范高等专科学校数学系, 湖北 丹江口 442700)

摘要: 文章在指数分布参数的先验分布为其共轭先验分布 *Gamma* 分布 $\Gamma(a, b)$ 时, 给出了其在熵损失函数下的 *E - Bayes* 估计和多层 *Bayes* 估计。

关键词: 指数分布; 熵损失函数; *E - Bayes* 估计; 多层 *Bayes* 估计

中图分类号: O213.2

文献标识码: A

在生产、生活中越来越多的产品要求可靠性指标, 为此需要对产品进行可靠性测试。指数分布在排队论和可靠性理论中有着广泛的应用。如各种电子元件的寿命、电话的通话时间、候车等待时间等都可认为服从指数分布。关于可靠度的估计, 近年来用 *Bayes* 方法取得了一些进展, 多数是在平方损失下研究指数分布参数的 *Bayes* 估计, 本文在熵损失函数下分别给出了指数分布参数的 *E - Bayes* 估计, 并且在 λ 的共轭先验分布下给出了 λ 的多层 *Bayes* 估计。

1 λ 的 *Bayes* 估计

设 X_1, X_2, \dots, X_n 是来自指数分布总体 X 的独立同分布样本, 则 $f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} (\lambda > 0)$ 为总体参数。

定义 1 设随机变量 X_1, \dots, X_n 来自于总体密度为 $f(x; \theta)$ 的分布。如果 δ 是 θ 的判决空间中的一个估计, 则熵损失函数为似然比对数的数学期望即:

$$L(\theta, \delta) = E_{\theta} \left\{ \ln \frac{f(\theta | x_1, \dots, x_n)}{f(\delta | x_1, \dots, x_n)} \right\}$$

则指数分布的熵损失函数为:

$$L(\lambda, \delta) = E_{\lambda} \left\{ \ln \frac{\lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}}{\delta^n e^{-\delta \sum_{i=1}^n x_i}} \right\} = E_{\lambda} \left\{ \ln \left[\left(\frac{\lambda}{\delta} \right)^n + \ln e^{(\delta - \lambda) \sum_{i=1}^n x_i} \right] \right\} \quad (1)$$

此损失函数关于 δ 是严格凸的。

定理 1 在给定任一先验分布和熵损失函数 (1) 式下, 指数分布参数 λ 的 *Bayes* 估计为 $\hat{\delta}_b(x) = \left[E \left[\frac{1}{\lambda} | x \right] \right]^{-1}$, 且是 λ 唯一的 *Bayes* 估计。这里 $x = (x_1, \dots, x_n)$

证明 由于 $L(\lambda, \delta) = n \left[\ln \frac{\lambda}{\delta} + \frac{\delta}{\lambda} - 1 \right]$, 令 $\delta(x)$ 为 λ 的任一 *Bayes* 估计, 则其 *Bayes* 风险为:

$$E[L(\lambda, \delta)] = E \left[n \ln \frac{\lambda}{\delta} + n \frac{\delta}{\lambda} - n \right] = E \left\{ E \left[n \ln \frac{\lambda}{\delta} + n \frac{\delta}{\lambda} - n \mid x \right] \right\} \quad (2)$$

式 (2) 左边表示关于 λ 和 x 的联合分布期望, 要使式 (2) 达到最小, 只需极小化后验风险, 即使 $E \left[n \ln \frac{\lambda}{\delta} + n \frac{\delta}{\lambda} - n \mid x \right]$ 关于 δ 达到最小。记

$$h(\delta) = E \left[n \ln \frac{\lambda}{\delta} + n \frac{\delta}{\lambda} - n \mid x \right] = n \left[E(\ln \lambda | x) - \ln \delta + E \left[\frac{1}{\lambda} | x \right] - 1 \right]$$

对 $h(\delta)$ 关于 δ 求导并令其为 0 解得:

$$\hat{\delta}_b(x) = \left[E \left(\frac{1}{\lambda} | x \right) \right]^{-1}$$

又 $h(\delta)$ 关于 δ 是严格凸函数, 故 $\hat{\delta}_b(x)$ 是其唯一的极小值点, 进而得到 *Bayes* 估计是唯一的。

2 给定先验分布下 λ 的 *E - Bayes* 估计和多层 *Bayes* 估计

若指数分布参数 λ 的先验分布为其共轭先验分布

$\Gamma(a, b)$, 其密度函数为:

$$\pi(\lambda|a, b) = \frac{b^a \lambda^{a-1} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)} \quad (0 < \lambda < \infty, a > 0, b > 0) \quad (3)$$

这里 a, b 均为超参数。

定义 2 设 $D = \{(a, b): 0 < a < 1, 0 < b < c\}$, $\pi(a, b)$ 是 a 和 b 在区域上的密度函数, 称 $\lambda_{EB} = \iint_D (a, b) \pi(a, b) da db$ 为 λ 的 E -Bayes 估计, $\lambda(a, b)$ 为 λ 的 Bayes 估计 (用超参数估计的)。

定理 2 对指数分布, 若 λ 的先验分布为 (3) 式, 则在熵损失函数下 λ 的 Bayes 估计为 $\hat{\lambda}_b(x) = \frac{n+a-1}{T}$,

其中 $T = b + \sum_{i=1}^n x_i$; 若 a, b 的联合分布为均匀分布, 则 λ 的 E -Bayes 估计为 $\frac{(2n-1) \cdot \ln(tc+1)}{2c}$ (其中 $t =$

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

)。证明 对指数分布, λ 的先验分布为 (3) 式, 而 λ 的似然函数为 $L(\lambda) = \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}$, 根据 Bayes 定理, λ 的后验密度为:

$$\begin{aligned} h(\lambda|x) &= \frac{\pi(\lambda|a, b)L(\lambda)}{\int_0^{\infty} \pi(\lambda|a, b)L(\lambda)d\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^{a-1} e^{-b\lambda} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i}}{\int_0^{\infty} \lambda^{a-1} e^{-b\lambda} \lambda^n e^{-\lambda \sum_{i=1}^n x_i} d\lambda} = \\ &= \frac{\lambda^{n+a-1} e^{-\lambda T}}{\int_0^{\infty} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda T} d\lambda} = \frac{T^{n+a} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda T}}{\int_0^{\infty} (T\lambda)^{n+a-1} e^{-T\lambda} d(T\lambda)} = \\ &= \frac{T^{n+a} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda T}}{\Gamma(n+a)} = \Gamma(n+a, T) \end{aligned}$$
$$(T = b + \sum_{i=1}^n x_i)$$
$$E\left[\frac{1}{\lambda} \middle| x\right] = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} h(\lambda|x) d\lambda = \int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{T^{n+a} \lambda^{n+a-1} e^{-\lambda T}}{\Gamma(n+a)} d\lambda = \frac{T}{n+a-1}$$

在熵损失函数下 λ 的 Bayes 估计为 $\hat{\lambda}_b(x) = \frac{n+a-1}{T}$, 其中 $T = b + \sum_{i=1}^n x_i$, 此时 $\hat{\lambda}_b(x)$ 中仍然含有超参数 a, b 应选择 a 和 b 使得 $\pi(\lambda|a, b)$ 为 λ 的减函数, 再由 Bayes 估计的稳健性, 可以确定超参数 a 和 b 的范围为 $0 < a < 1, 0 < b < c (c > 0$ 为常数)。若 a, b 的联合分布为均匀分布, 即 $\pi(a, b) = \frac{1}{c}$, 根据定义 λ 的 E

- Bayes 估计为:

$$\begin{aligned} \lambda_{EB} &= \iint_D (a, b) \pi(a, b) da db = \\ &= \int_0^1 \int_0^c \frac{1}{c} \cdot \frac{n+a-1}{T} da db = \\ &= \frac{1}{c} \int_0^1 (n+a-1) da \int_0^c \frac{1}{T} db = \\ &= \frac{(2n-1) \cdot \ln(tc+1)}{2c} \end{aligned}$$

其中, $t = \frac{1}{\sum_{i=1}^n x_i}$, 此时 λ 的多层先验密度函数为:

$$\begin{aligned} \pi(\lambda) &= \iint_D (\lambda|a, b) \pi(a, b) da db = \\ &= \frac{1}{c} \int_0^1 \int_0^c \frac{b^a \lambda^{a-1} e^{-b\lambda}}{\Gamma(a)} da db \end{aligned} \quad (4)$$

定理 3 对指数分布, 若 λ 的多层先验分布由 (4) 式给出, 则在熵损失函数下 λ 的多层 Bayes 估计为:

$$\hat{\lambda}_b(x) = \frac{\int_0^1 \int_0^c \frac{b^a \Gamma(n+a)}{\Gamma(a) T^{n+a}} da db}{\int_0^1 \int_0^c \frac{b^a \Gamma(n+a-1)}{\Gamma(a) T^{n+a-1}} da db}$$

证明 根据 Bayes 定理, λ 的多层后验密度为:

$$h(\lambda|x) = \frac{\pi(\lambda)L(\lambda|x)}{\int_0^{\infty} \pi(\lambda)L(\lambda|x)d\lambda} = \frac{\int_0^1 \int_0^c \frac{b^a \lambda^{a-1} e^{-\lambda T}}{\Gamma(a)} da db}{\int_0^1 \int_0^c \frac{b^a \Gamma(n+a)}{\Gamma(a) T^{n+a}} da db}$$

在熵损失函数下 λ 的多层 Bayes 估计为:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_b(x) &= \left[E\left[\frac{1}{\lambda} \middle| x\right] \right]^{-1} = \left[\int_0^{\infty} \frac{1}{\lambda} \cdot h(\lambda|x) d\lambda \right]^{-1} = \\ &= \frac{\int_0^1 \int_0^c \frac{b^a \Gamma(n+a)}{\Gamma(a) T^{n+a}} da db}{\int_0^1 \int_0^c \frac{b^a \Gamma(n+a-1)}{\Gamma(a) T^{n+a-1}} da db} \end{aligned}$$

参考文献:

- [1] 李凡群. 熵损失下 Pareto 分布参数的 Bayes 估计 [J]. 阜阳师范学院学报: 自然科学版, 2007, 24(1): 9-11.
- [2] 刘超男, 刘小惠, 郭艳. 熵损失函数下两参数指数威布尔分布尺度参数的 Bayes 估计 [J]. 数学理论与应用, 2008, 28(4): 54-57.
- [3] 王红. 熵损失函数下 Poisson 分布参数的 Bayes 估计 [J]. 湖州师范学院学报, 2007, 29(2): 28-31.
- [4] 韩明. 参数的 E -Bayes 估计法及应用 [J]. 数学的实践与认识, 2004, 34(9): 97-106.
- [5] 茆诗松. 贝叶斯统计 [M]. 北京: 中国统计出版社, 1999.

(下转第 283 页)

- [7] 马跃超. 可数 S -闭空间及可数仿 S -闭空间 [J]. 烟台师范学院学报, 1994, 12(4): 245-248
- [8] Youness E A. E -convex sets, E -convex functions and E -convex programming [J]. Journal of Optimization Theory and Applications 1999, 102(2): 439-450
- [9] Jian J B. On (E, F) -generalized convexity [J]. International Journal of Mathematical sciences 2003, 2(1): 121-132
- [10] Bector C R, Singh C. B -vex function [J]. Journal of Optimization Theory and Applications 1991, 71: 237-253
- [11] 史树中. 凸分析 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1990

Semi $B - (E, F)$ -convex Constrained Single-objective Programming of Optimal Conditions

MA Xiaona

(Department of Applied Mathematics, Suzhou University, Suzhou 234000, China)

Abstract Convexity and generalized convexity in the convexity of mathematical programming optimization theory, optimization control and many other areas of mathematics plays an important role, but the limitations of convexity are also very obvious. This paper generalized two kinds of convex functions: B -convex function and semi (E, F) -convex function are researched furtherly. A new kind of generalized convexity: semi $B - (E, F)$ -convexity is introduced, semi $B - (E, F)$ -convex function and its generalized convexity are introduced. This paper presents the optimal conditions of single-objective programming for semi $B - (E, F)$ -convexity functions using properties of semi $B - (E, F)$ -convexity functions.

Key words semi $B - (E, F)$ -convex function; semi (E, F) -convex programming; optimality conditions

(上接第 279 页)

Estimate of Exponential Distribution Parameter Under Entropy Loss Function

LI Jun-hua, ZHONG Tai-yong

(Department of Mathematics, Yunyang Teacher's College, Danjiangkou 442700, China)

Abstract In this paper, provide that the prior distribution of exponential parameter distribution is Gamma distribution, the expected Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation under Entropy Loss function were given out.

Key words exponential distribution; entropy loss function; expected Bayesian estimation; hierarchical Bayesian estimation