

Pareto 分布参数的 Bayes 估计

李艳颖

(宝鸡文理学院数学系, 陕西 宝鸡 721013)

摘要: 文章主要研究了 Pareto 分布的参数估计。在平方损失函数下给出了 Pareto 分布参数的 Bayes 估计, 并且证明了这一估计是可容许的。在 Q -对称熵损失函数下, 讨论了 Pareto 分布参数的 Bayes 估计。

关键词: Pareto 分布; 平方损失; Bayes 估计; 可容许性; Q -对称熵损失函数

中图分类号: O177

文献标识码: A

Pareto 分布是意大利经济学家 Pareto 将其作为一种收入分布介绍的, 一个多世纪以来, 它不仅在经济收入模型中得到应用, 而且在广泛的应用领域中也越来越受到重视。常常用它来描述各种社会经济、物理以及生物现象, 例如城市人口、股票价格、保险风险、商业失效、江河流量和某种药理过程后病人的存活时间, 并且在军事领域、天文领域也有应用。Harris (1968) 和 Amoh (1983)^[1] 对其应用进行了广泛深入的搜集和介绍。很多作者讨论过 Pareto 分布的估计和性质。Sohman (1999) 提及了 Pareto 分布作为可靠性寿命模型的重要性。因此对 Pareto 分布的研究有着重要的理论与应用价值。李凡群^[2] 讨论了在熵损失下 Pareto 分布参数的 Bayes 估计, 给出了 Bayes 置信限。许俊美、宋立新^[3] 讨论了对称损失下 Pareto 分布参数的 Bayes 估计。毕祥娟、李波^[4] 研究了在定数截尾样本下, 形状参数未知时双参数 Pareto 分布尺度参数的检验问题, 并利用似然比检验的方法, 获得了检验统计量及检验否定域的上下界。

本文对 Pareto 分布主要作了 2 方面的研究:

- (1) 在平方损失函数下, 给出了 Pareto 分布参数的 Bayes 估计, 并且证明了这一估计是可容许。
- (2) 在 Q -对称熵损失函数下, 讨论了 Pareto 分布参数的 Bayes 估计。

1 平方损失函数下 Pareto 分布参数的 Bayes 估计

1.1 Pareto 分布

若 $\theta > 0$ $a > 0$ 为实数, 则由密度函数

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta a^\theta x^{-(\theta+1)} & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$$

确定的随机变量 X 的分布称为 Pareto 分布, 记为 $Pa(\theta, a)$, 其中 $a > 0$ 为尺度参数, $\theta > 0$ 为形状参数。当 $a = 1$ 时, Pareto 分布称为幂分布。

Pareto 分布的分布函数为:

$$F(x) = \begin{cases} 1 - a^\theta x^{-\theta} & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$$

数学期望为:

$$E(X) = a\theta(\theta - 1)^{-1} \quad (\theta > 1)$$

数学方差为:

$$\text{Var}(x) = a^2\theta(\theta - 1)^{-2}(\theta - 2)^{-1} \quad (\theta > 2)$$

设 X 的密度函数为:

$$f(x; \theta) = \begin{cases} \theta a^\theta x^{-(\theta+1)} & x > a \\ 0 & x \leq a \end{cases}$$

($\theta > 0$ $a > 0$ a 为已知)

X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体 X 的容量为 n 的简单随机样本, 则 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合密度函数为:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \theta^n a^{n\theta} \left(\prod_{i=1}^n x_i \right)^{-(\theta+1)} \quad (1)$$

这里 x_1, x_2, \dots, x_n 为 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, θ 未知, 我们从样本 X_1, X_2, \dots, X_n 出发, 在平方损失意义下估计参数 θ

1.2 参数 θ 的 Bayes 估计

引理 1^[5] 在给定先验分布 $\pi(\theta)$ 和平方损失函数 $L(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^2$ 下, θ 的 Bayes 估计 $\delta^{\pi}(x)$ 为后验分布 $\pi(\theta | x)$ 的均值, 即 $\delta^{\pi}(x) = E(\theta | x)$ 。

定理 1 在平方损失函数 $L(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^2$ 下, 先验分布为伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$ 即 $\pi(\theta) = \frac{\lambda^{\alpha} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta}}{\Gamma(\alpha)}$, $\alpha > 0, \lambda > 0$ 则 Pareto 分布参数 θ 的 Bayes 估计为 $\delta_b(\theta) = \frac{n + \alpha}{T + \lambda}$ 其中 $T = \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln a)$ 。

证明 先求参数 θ 的后验密度, 然后求 θ 的 Bayes 估计。由 (1) 式可知 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合密度函数为 $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \theta^{\alpha} a^{n\theta} (\prod_{i=1}^n x_i)^{-(\theta+1)}$, 由于参数 θ 服从伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$, 其密度函数为 $\pi(\theta) = \frac{\lambda^{\alpha} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta}}{\Gamma(\alpha)}$, 则参数 θ 的后验密度为:

$$h(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)}{\int \pi(\theta) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) d\theta} = \frac{\Gamma^{-1}(\alpha) \lambda^{\alpha} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta} \theta^{\alpha} a^{n\theta} (\prod_{i=1}^n x_i)^{-(\theta+1)}}{\int \Gamma^{-1}(\alpha) \lambda^{\alpha} \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta} \theta^{\alpha} a^{n\theta} (\prod_{i=1}^n x_i)^{-(\theta+1)} d\theta} = \frac{(T + \lambda)^{n+\alpha}}{\Gamma(n + \alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(T+\lambda)\theta}$$

其中 $T = \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln a)$ 。可见, 后验分布服从 $\Gamma(n + \alpha, T + \lambda)$ 分布。于是由引理 1 得参数 θ 的 Bayes 估计为:

$$\delta_b(\theta) = \int \theta \cdot h(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta = \frac{n + \alpha}{T + \lambda}$$

1.3 可容许性证明

引理 2^[5] 在给定的 Bayes 决策问题中, 假如对给定的先验分布 $\pi(\theta)$, θ 的 Bayes 估计 $\delta_b(Y)$ 是唯一的, 则它是容许估计。

定理 2 在平方损失函数 $L(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^2$ 下, 对任何先验分布, Pareto 分布参数 θ 的 Bayes 估计是可容许估计。

证明 由于平方损失函数 $L(\theta, \delta) = (\delta - \theta)^2$, 对于 δ 是严格凸函数, 则 Pareto 分布参数 θ 的 Bayes 估计必是唯一的, 由引理 2 可知, 参数 θ 的 Bayes 估计是可容许估计。

2 Q-对称熵损失函数下 Pareto 分布参数的 Bayes 估计

由式 (1) 在 Q-对称熵损失函数^[6]

$$L(\theta, \delta) = \left[\frac{\theta}{\delta} \right]^q + \left[\frac{\delta}{\theta} \right]^q - 2 \quad (q > 0) \quad (2)$$

意义下估计参数 θ

引理 3^[7] 设 (x, A, u) 和 (y, B, v) 是两个测度空间, f 是定义于 $x \times y$ 上的非负可测函数, 则

$$\begin{aligned} \int_x \int_y f(x, y) dv(y) du(x) &= \int_y \int_x f(x, y) du(x) dv(y) = \\ \iint f du \times v \end{aligned}$$

定理 3 在 Q-对称熵损失函数 (2) 式下, 对于任何先验分布 $\pi(\theta)$, Pareto 分布参数 θ 的 Bayes 估计为 $\delta_b(X) = \left[\frac{E(\theta^q | X)}{E(\theta^{-q} | X)} \right]^{1/2q}$, 其中 $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, 且若存在 δ' , 其 Bayes 风险 $R(\delta') < \infty$, 则此 Bayes 估计是唯一的。

证明 设 $\delta(X)$ 为 θ 的任一估计, 在 Q-对称熵损失函数 (2) 式下, $\delta(X)$ 对应的 Bayes 风险为

$$R_{\pi}(\delta(X)) = E(L(\theta, \delta)) = E(E(L(\theta, \delta) | X)) = E\left[E\left[\left[\frac{\theta}{\delta} \right]^q + \left[\frac{\delta}{\theta} \right]^q - 2 \middle| X \right] \right] \quad (3)$$

(3) 式左端 E 表示关于 θ 与样本 X_1, X_2, \dots, X_n 的联合分布求期望。若要使 (3) 式达到最小, 只须极小化 $E\left[\left[\frac{\theta}{\delta} \right]^q + \left[\frac{\delta}{\theta} \right]^q - 2 \middle| X \right]$ 即可。又由于

$$E\left[\left[\frac{\theta}{\delta} \right]^q + \left[\frac{\delta}{\theta} \right]^q - 2 \middle| X \right] = \frac{1}{\delta^q} E(\theta^q | X) + \delta^q E\left(\frac{1}{\theta^q} | X\right) - 2 \quad (4)$$

由引理 3 可知, 使得后验风险达到最小的估计即为 Bayes 估计。故对 (4) 式关于 δ 求导数并令其为 0 解得 $\delta = \left[\frac{E(\theta^q | X)}{E(\theta^{-q} | X)} \right]^{1/2q}$, 所以 $\delta = \left[\frac{E(\theta^q | X)}{E(\theta^{-q} | X)} \right]^{1/2q}$ 是唯一最小值点。从而得到 θ 的 Bayes 估计为 $\delta_b(X) = \left[\frac{E(\theta^q | X)}{E(\theta^{-q} | X)} \right]^{1/2q}$, 易见, 当 $\delta_b(X)$ 的 Bayes 风险有限, 它还是唯一的 Bayes 估计, 因为由题设 $R(\delta') < \infty$, 而 $R(\delta_b) < R(\delta')$, 故 $R(\delta_b) < \infty$ 。

设 X_i 服从 Pareto 分布 ($i = 1, 2, \dots, n$) 并且彼此独立, 这里 x_1, x_2, \dots, x_n 为 X_1, X_2, \dots, X_n 的观测值, θ 是未知的参数, 下面考虑在给定先验分布后, 参数 θ 的 Bayes 估计的精确形式。

定理 4 在 Q -对称熵损失函数 $L(\theta, \delta) = \left(\frac{\theta}{\delta}\right)^q + \left(\frac{\delta}{\theta}\right)^q - 2$ ($q > 0$) 下, 先验分布为伽玛分布 $Ga(\alpha, \lambda)$ 即 $\pi(\theta) = \frac{\lambda^\alpha \theta^{\alpha-1} e^{-\lambda\theta}}{\Gamma(\alpha)}$, $\alpha > 0, \lambda > 0$ 则 Pareto 分布参数

θ 的 Bayes 估计为 $\hat{\theta}_B(\theta) = \frac{1}{T + \lambda} \left[\frac{\Gamma(n + \alpha + q)}{\Gamma(n + \alpha - q)} \right]^{\frac{1}{2q}}$, 其中 $T = \sum_{i=1}^n [\ln x_i - \ln \lambda]$.

证明 θ 的后验密度为

$$h(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\pi(\theta) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)}{\int_0^{+\infty} \pi(\theta) \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) d\theta} = \frac{(T + \lambda)^{n+\alpha} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(T+\lambda)\theta}}{\Gamma(n + \alpha)}$$

其中 $T = \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln \lambda)$ 。可见, 后验分布服从 $\Gamma(n + \alpha, T + \lambda)$ 分布。于是有

$$E(\theta^q | X) = \int_0^{+\infty} \theta^q \cdot h(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta = \int_0^{+\infty} \theta^q \frac{(T + \lambda)^{n+\alpha}}{\Gamma(n + \alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(T+\lambda)\theta} d\theta = \frac{1}{\Gamma(n + \alpha)(T + \lambda)^{q-1}} \int_0^{+\infty} [(T + \lambda)\theta]^{n+\alpha-q-1} e^{-(T+\lambda)\theta} d[(T + \lambda)\theta] = \frac{1}{\Gamma(n + \alpha)(T + \lambda)^q} \int_0^{+\infty} [(T + \lambda)\theta]^{n+\alpha-q-1} e^{-(T+\lambda)\theta} d[(T + \lambda)\theta] = \frac{\Gamma(n + \alpha + q)}{\Gamma(n + \alpha)(T + \lambda)^q} E(\theta^{-q} | X) = \int_0^{+\infty} \theta^{-q} \cdot h(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) d\theta = \int_0^{+\infty} \theta^{-q} \frac{(T + \lambda)^{n+\alpha}}{\Gamma(n + \alpha)} \theta^{n+\alpha-1} e^{-(T+\lambda)\theta} d\theta =$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{(T + \lambda)^{n+\alpha}}{\Gamma(n + \alpha)} \theta^{n+\alpha-q-1} e^{-(T+\lambda)\theta} d\theta = \frac{(T + \lambda)^q}{\Gamma(n + \alpha)} \int_0^{+\infty} [(T + \lambda)\theta]^{n+\alpha-q-1} e^{-(T+\lambda)\theta} d[(T + \lambda)\theta] = \frac{(T + \lambda)^q \Gamma(n + \alpha - q)}{\Gamma(n + \alpha)}$$

由定理 3 得参数 θ 的 Bayes 估计为:

$$\hat{\theta}_B(X) = \left[\frac{E(\theta^q | X)}{E(\theta^{-q} | X)} \right]^{1/2q} = \frac{1}{T + \lambda} \left[\frac{\Gamma(n + \alpha + q)}{\Gamma(n + \alpha - q)} \right]^{1/2q}$$

其中 $T = \sum_{i=1}^n (\ln x_i - \ln \lambda)$ 。

参考文献:

- [1] A molh B C, Press S J Bayesian inference for pareto populations[J]. J Econometer 1983, 21: 287-306
- [2] 李凡群. 熵损失下的 Pareto 分布参数的 Bayes 估计 [J]. 阜阳师范学院学报: 自然科学版, 2007, 3 (1): 9-11.
- [3] 许俊美, 宋立新. 一种对称损失下 Pareto 分布参数的 Bayes 估计 [J]. 白城师范学院学报, 2007, 6 (3): 5-7.
- [4] 毕祥娟, 李波. 定数截尾试验下两总体双参数 Pareto 分布尺度参数的比较 [J]. 统计与决策, 2007, (19): 14-16.
- [5] 茆诗松, 王静龙, 濮晓龙. 高等数理统计 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1998
- [6] 杜宇静, 赖民. q 对称熵损失函数下指数分布的参数估计 [J]. 吉林大学学报: 理论版, 2005 (1): 10-11.
- [7] Lehmann E L, George Casella 点估计理论 [M]. 北京: 中国统计出版社, 2004

Bayesian Estimation of Pareto Distribution Parameter

LI Yan-ying

(Mathematics Department, Baoji Art and Science College, Baoji 721013, China)

Abstract This paper mainly discussed the estimation of Pareto distribution parameters (1) Under the square loss function, the paper gave the Bayesian estimation of Pareto distribution parameter; and had proven that this estimation was admissible (2) Under the Q -symmetrical entropy loss function, the paper discussed Bayesian estimation of Pareto distribution parameter

Key words Pareto distribution, square loss, Bayesian estimation, admissibility, Q -symmetrical entropy loss function