

## 关于 CAP-嵌入子群的一个注记

李长稳<sup>1</sup>, 於 适<sup>2</sup>

(1. 徐州师范大学数学科学学院, 江苏 徐州 221116; 2. 淮海工学院理学院, 江苏 连云港 222001)

**摘 要:** 假设  $G$  是一个有限群,  $H$  是  $G$  的一个子群.  $H$  称为  $G$  的 CAP-子群, 如果  $H$  覆盖或远离  $G$  的每个主因子;  $H$  称为  $G$  的 CAP-嵌入子群, 如果对于  $H$  的每个素因子  $p$  存在  $G$  的某个 CAP-子群  $K$  使得  $H$  的某个 Sylow  $p$ -子群也是  $K$  的一个 Sylow  $p$ -子群. 利用一些素数幂阶子群的 CAP-嵌入性研究有限群的  $p$ -幂零性, 推广了前人的一些结果.

**关键词:** CAP-嵌入子群;  $p$ -幂零; Sylow  $p$ -子群

**中图分类号:** O152.1

**文献标识码:** A

本文中所有的群都是有限群. 覆盖-远离性最初是 Gaschütz<sup>[1]</sup>在 1962 年研究有限可解群的子群的某个共轭类时发现的. 之后许多作者专注于寻找有限可解群中具有这个性质的一类子群. 例如 Gillman<sup>[2]</sup>和 Tomkinson<sup>[3]</sup>利用构造性的方法给出了可解群的此类子群. 2003 年, 郭秀云和 Shum K P<sup>[4]</sup>利用极大子群、Hall 子群和 2-极大子群的远离-覆盖性质使得有限群成为可解、 $p$ -可解和  $p$ -幂零的若干新的刻画. 将远离-覆盖性推广成为近年来群论中比较热门的课题. 如 2006 年樊恽、郭秀云等人<sup>[5]</sup>引入的半覆盖-远离性; 2009 年郭鹏飞、郭秀云<sup>[6]</sup>又给出了 CAP-嵌入子群. 本文在文献 [6] 的基础上继续这方面的工作, 主要通过假设  $G$  的某个正规子群的 Sylow 子群的所有  $n$ -极大子群为  $G$  的 CAP-嵌入子群而得到  $G$  为  $p$ -幂零群的充分条件. 证明过程改进了前人的一些技巧, 得到的定理推广了前人的一些结论.

## 1 预备知识

**定义 1** 设  $A$  是群  $G$  的子群,  $H/K$  为  $G$  的主因子.

(1) 若  $HA = KA$ , 称  $A$  覆盖  $H/K$ .

(2) 若  $H \cap A = K \cap A$ , 称  $A$  远离  $H/K$ .

(3) 若  $A$  或覆盖或远离  $G$  的每个主因子, 则称  $A$  在  $G$  中具有覆盖-远离性质. 简言之,  $A$  为  $G$  的 CAP-子群.

**定义 2**<sup>[6]</sup> 群  $G$  的子群  $H$  称为  $G$  的 CAP-嵌入子群,

如果对于  $H$  的每个素因子  $p$  存在  $G$  的某个 CAP-子群  $K$  使得  $H$  的某个 Sylow  $p$ -子群也是  $K$  的一个 Sylow  $p$ -子群.

**引理 1**<sup>[6]</sup>  $H$  是  $G$  的一个 CAP-嵌入子群,  $N \triangleleft G$ , 则  $HN/N$  是  $G/N$  的一个 CAP-嵌入子群.

**引理 2** 设群  $G$  的阶的一个素因子  $p$  满足  $(|G|, p-1) = 1$ . 又设  $H$  是  $G$  的一个正规子群使得  $G/H$  是  $p$ -幂零群. 如果  $H$  的一个 Sylow  $p$ -子群  $P$  循环, 则  $G$  是  $p$ -幂零群.

**证明** 分两种情况讨论:

(1)  $H = G$ . 由  $N/C$  定理,  $N_G(P)/C_G(P) \leq \text{Aut}(P)$ . 设  $|P| = p^n$ , 由  $P$  循环有  $\text{Aut}(P) = p^{n-1}(p-1)$ . 但因  $P \leq C_G(P)$  有  $p \nmid |N_G(P)/C_G(P)|$ . 由  $(|G|, p-1) = 1$  必有  $|N_G(P)/C_G(P)| = 1$ , 即  $N_G(P) = C_G(P)$ . 应用 Burnside 定理, 即得  $G$  的  $p$ -幂零性.

(2)  $H < G$ . 由 (1) 知  $H$  是  $p$ -幂零的. 设  $H_p$  是  $H$  的正规  $p$ -补. 由于  $H_p \text{ char } H \triangleleft G$ , 故  $H_p \triangleleft G$ . 若  $H_p \neq 1$ , 考虑商群  $G/H_p$ .  $(G/H_p)/(H/H_p) \cong G/H$  是  $p$ -幂零群.  $PH_p/H_p$  是  $H/H_p$  的循环 Sylow  $p$ -子群.  $G/H_p$  满足定理条件. 归纳得  $G/H_p$  是  $p$ -幂零群, 从而  $G$  是  $p$ -幂零群. 下设  $H_p = 1$ , 即  $H$  是  $p$ -群. 设  $K/H$  是  $G/H$  的正规  $p$ -补. 由 Schur-Zassenhaus 定理, 存在  $K$  的 Hall  $p'$ -子群  $K_p$ , 使得  $K = H K_p$ . 由 (1) 知,  $K$  是  $p$ -幂零的, 故

$K_p \triangleleft K$ . 由于  $K_p \text{ char } K \triangleleft G$ , 故  $K_p \triangleleft G$ . 显然  $K_p$  也是  $G$  的  $p$ -补, 所以  $G$  是  $p$ -幂零群.

引理 3 设  $G$  是一个有限群,  $p$  是一个素数, 满足对于不小于 1 的整数  $n$  有  $(|G|, (p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)) = 1$ . 假设  $N$  是  $G$  的一个正规子群使得  $G/N$  是  $p$ -幂零的并且  $p^{n+1}$  不整除  $|N|$ , 则  $G$  是  $p$ -幂零的.

证明 由引理假设和文献 [7] 中引理 2.11 知  $N$  是  $p$ -幂零的. 设  $N_p$  是  $N$  的正规 Hall  $p'$ -子群, 则  $N_p \triangleleft G$ . 若  $N_p \neq 1$ , 由归纳得  $G/N_p$  是  $p$ -幂零群, 从而  $G$  是  $p$ -幂零群. 下设  $N_p = 1$ , 即  $N = P$ . 由  $G/N$  为  $p$ -幂零群, 可设  $K/N$  是  $G/N$  的正规  $p$ -补. 由 Schur-Zassenhaus 定理, 存在  $K$  的 Hall  $p'$ -子群  $K_p$ , 使得  $K = N K_p$ . 再由文献 [7] 中引理 2.11  $K$  是  $p$ -幂零的. 又  $K$  的正规  $p$ -补  $K_p$  也为  $G$  的正规  $p$ -补, 故  $G$  为  $p$ -幂零的.

引理 4<sup>[8]</sup> 设  $P$  为群  $G$  的 Sylow  $p$ -子群,  $N$  是  $G$  的正规子群. 如果  $P \cap N \leq \Phi(P)$ , 则  $N$  为  $p$ -幂零群.

引理 5<sup>[9]</sup> 设  $G$  是有限群,  $N \triangleleft G, H \leq G$ . 若  $N \leq \Phi(H)$ , 则  $N \leq \Phi(G)$ .

引理 6<sup>[10]</sup> 设  $G$  是一个与  $A_4$  无关的有限群,  $p$  为  $|G|$  的最小素因子. 假设  $H$  是  $G$  的一个正规子群,  $G/H$  是  $p$ -幂零的. 如果  $H$  有一个 Sylow  $p$ -子群  $P$  满足  $|P| \leq p^2$ , 则  $G$  是  $p$ -幂零的.

## 2 主要结果

定理 1 设  $G$  是一个有限群,  $p$  是一个素数, 满足对于不小于 1 的整数  $n$  有  $(|G|, (p-1)(p^2-1)\dots(p^n-1)) = 1$ . 假设  $H$  是  $G$  的一个正规子群,  $G/H$  是  $p$ -幂零的. 如果  $H$  有一个 Sylow  $p$ -子群  $P$  使得  $P$  是循环群或者  $P$  的任意  $n$ -极大子群是  $G$  的 CAP-嵌入子群, 则  $G$  是  $p$ -幂零的.

证明 假设定理不成立,  $G$  为极小阶反例.

(1) 由引理 2  $P$  非循环.

(2) 由引理 3  $|P| \geq p^{n+1}$ , 这说明  $P$  的任意  $n$ -极大子群  $P_n \neq 1$ .

(3)  $H$  中包含  $G$  的唯一一个极小正规子群  $N, G/N$  是  $p$ -幂零的且  $N$  不包含在  $\Phi(G)$  中.

设  $N$  为  $G$  的包含在  $H$  中的一个极小正规子群, 考虑商群  $G/N$ . 因为  $P$  是  $H$  的 Sylow  $p$ -子群, 所以有  $PN/N$  是  $H/N$  的 Sylow  $p$ -子群. 如果  $|PN/N| \leq p^n$ , 则由引理 3  $G/N$  是  $p$ -幂零的. 所以我们可设  $|PN/N| \geq p^{n+1}$ . 设  $M_n/N$  是  $PN/N$  的任一  $n$ -极大子群, 则  $M_n = M_n \cap PN = (M_n \cap P)N$ . 设  $P_n = M_n \cap P$ . 因为  $p^n = |PN/N : M_n/N| = |PN : (M_n \cap P)N| = |P : M_n \cap P| = |P : P_n|$ , 所以  $P_n$  是  $P$  的  $n$ -极大子群. 由定理 1 条件,  $P_n$

是  $G$  的 CAP-嵌入子群. 由引理 1 知  $M_n/N$  是  $G/N$  的 CAP-嵌入子群. 从而  $G/N$  满足定理 1 的假设. 由  $G$  的极小选择知  $G/N$  是  $p$ -幂零群. 若  $G$  还有另一个包含于  $H$  的极小正规子群  $R$ , 类似可证明  $G/R$  是  $p$ -幂零的. 此时  $G \cong G/(N \cap R)$  是  $p$ -幂零的, 矛盾. 同时若  $N \leq \Phi(G)$ , 则  $G/\Phi(G) \cong (G/N)/(\Phi(G)/N)$  是  $p$ -幂零的. 由  $p$ -幂零群系的饱和性知  $G$  是  $p$ -幂零的, 矛盾. 于是  $N$  是  $G$  的包含在  $H$  中的唯一极小正规子群且  $N$  不包含在  $\Phi(G)$  中.

$$(4) O_p(H) = 1$$

如果  $O_p(G) \neq 1$ , 考虑商群  $G/O_p(G)$ . 显然  $G/O_p(G)$  满足定理 1 的假设. 由  $G$  的极小选择知  $G/O_p(G)$  是  $p$ -幂零群, 从而  $G$  是  $p$ -幂零的, 矛盾.

(5)  $G$  是可解群.

如果  $p > 2$  由定理 1 条件知  $G$  是奇阶群, 从而  $G$  可解 (Feit-Thompson 定理). 当  $p = 2$  时, 如果  $|N|_2 \leq p^n$ , 由引理 3 知  $G$  是  $p$ -幂零的, 矛盾. 故可设  $|N|_2 \geq p^{n+1}$ . 如果  $P \leq N$  则  $P$  也是  $N$  的 Sylow  $p$ -子群. 取  $P$  的  $n$ -极大子群  $P_n$ . 由定理 1 条件,  $P_n$  是  $G$  的 CAP-嵌入子群. 于是存在  $G$  的覆盖远离子群  $A$ , 使得  $P_n$  是  $A$  的 Sylow  $p$ -子群. 若  $A$  覆盖  $N/1$  即  $AN = A$ , 则  $N \leq A$ , 从而  $P \leq A$ ,  $P$  是  $A$  的 Sylow  $p$ -子群, 矛盾. 若  $A$  远离  $N/1$  即  $A \cap N = 1$ , 则  $P_n \leq A \cap P \leq A \cap N = 1$ , 矛盾. 因此  $P \leq N$ . 如果  $P \cap N \leq \Phi(P)$ , 则由引理 4  $N$  是 2-幂零,  $N$  可解, 从而  $G$  可解. 如果  $P \cap N \not\leq \Phi(P)$ , 则存在  $P$  的极大子群  $P_1$  使得  $P = (P \cap N)P_1$ . 取  $P$  的  $n$ -极大子群  $P_n$ , 使得  $P_n$  包含在  $P_1$  中. 由定理 1 条件,  $P_n$  是  $G$  的 CAP-嵌入子群. 于是存在  $G$  的覆盖远离子群  $B$  使得  $P_n$  是  $B$  的 Sylow  $p$ -子群. 若  $B$  覆盖  $N/1$  即  $BN = B$  则  $N \leq B$  从而  $P_n \cap N$  是  $N$  的 Sylow  $p$ -子群. 又  $P \cap N$  是  $N$  的 Sylow  $p$ -子群, 必有  $P_n \cap N = P \cap N$ . 于是  $P = (P \cap N)P_1 = (P_n \cap N)P_1 \leq P_n P_1 = P$ , 矛盾. 若  $B$  远离  $N/1$  即  $B \cap N = 1$ , 则  $|BN|_2 = |B|_2 |N|_2 = |P_n| |N|_2$ ,  $|N|_2 \leq p^n$ , 与  $|N|_2 \geq p^{n+1}$  矛盾.

(6) 导出矛盾.

由 (4) 和 (5) 知  $N$  是交换  $p$ -群且  $N \leq P$ . 由  $G/N$  是  $p$ -幂零群, 可设  $T/N$  是  $G/N$  的正规  $p$ -补. 显然  $N$  是  $T$  的 Sylow  $p$ -子群. 如果  $|N| \geq p^{n+1}$ , 令  $P_n$  是  $P$  的任一  $n$ -极大子群. 由定理 1 条件,  $P_n$  是  $G$  的 CAP-嵌入子群. 于是存在  $G$  的覆盖远离子群  $B$  使得  $P_n$  是  $B$  的 Sylow  $p$ -子群. 若  $B$  覆盖  $N/1$  即  $BN = B$ , 则  $N \leq B$  从而  $N \leq P_n$ . 由  $P_n$  的任意性,  $N \leq \Phi(P)$ . 由引理 5  $N \leq \Phi(G)$ , 矛盾. 若  $B$  远离  $N/1$  即  $B \cap N = 1$ , 从而  $P_n \cap N = 1, |NP_n| = |N| |P_n| > |P|$ , 矛盾. 如果  $|N| \leq p^n$ , 由引理 3 知  $G$  是  $p$ -幂零的, 矛盾.

**推论 1** (文献[6], 定理 3.5) 设  $G$  是一个有限群,  $p$  是一个素数, 满足  $(|G|, p^2 - 1) = 1$ . 假设  $H$  是  $G$  的一个正规子群,  $GH$  是  $p$ -幂零的. 如果  $H$  有一个 Sylow  $p$ -子群  $P$  使得  $P$  的任意 2 极大子群是  $G$  的 CAP 嵌入子群, 则  $G$  是  $p$ -幂零的.

**推论 2** (文献[6], 定理 3.1) 设  $G$  是一个有限群,  $p$  是一个素数, 满足  $(|G|, p - 1) = 1$ . 假设  $H$  是  $G$  的一个正规子群,  $GH$  是  $p$ -幂零的. 如果  $H$  有一个 Sylow  $p$ -子群  $P$  使得  $P$  的任意极大子群是  $G$  的 CAP 嵌入子群, 则  $G$  是  $p$ -幂零的.

**推论 3** (文献[6], 定理 3.3) 设  $G$  是一个与  $A_4$  无关的有限群,  $p$  为  $|G|$  的最小素因子. 假设  $H$  是  $G$  的一个正规子群,  $GH$  是  $p$ -幂零的. 如果  $H$  有一个 Sylow  $p$ -子群  $P$  使得  $P$  的任意 2 极大子群是  $G$  的 CAP 嵌入子群, 则  $G$  是  $p$ -幂零的.

**证明** 利用引理 6 和定理 1 的证明方法.

**推论 4** (文献[4], 定理 3.11) 设  $G$  是一个与  $A_4$  无关的有限群,  $p$  为  $|G|$  的最小素因子. 假设  $H$  是  $G$  的一个正规子群,  $GH$  是  $p$ -幂零的. 如果  $H$  的所有 Sylow  $p$ -子群的 2 极大子群是  $G$  的 CAP 子群, 则  $G$  是  $p$ -幂零的.

**推论 5** (文献[4], 定理 3.14) 设  $G$  是一个与有限群,  $p$  为  $|G|$  的最小素因子. 假设  $H$  是  $G$  的一个正规子群,  $GH$  是  $p$ -幂零的. 如果  $H$  的所有 Sylow  $p$ -子群的极大子群是  $G$  的 CAP 子群, 则  $G$  是  $p$ -幂零的.

**参考文献:**

[1] Gaschütz W. Praefrattini gruppen [J]. Arch Math

1962, 13: 418-426

[2] Gillam J D. Cover-avoid subgroups in finite solvable groups [J]. J Algebra 1974, 29: 324-329.

[3] Tomkinson M J. Cover-avoidance properties in finite soluble groups [J]. Canad Math Bull 1976, 19 (2): 213-216

[4] Guo Xiyun, Shum K P. Cover-avoidance properties and the structure of finite groups [J]. J Pure and Applied Algebra 2003, 181: 297-308

[5] Fan Yun, Guo Xiyun, Shum K P. Remarks on two generalizations of subgroups [J]. Chinese Ann Math 2006, 27A(2): 169-176

[6] Guo Pengfei, Guo Xiyun. On CAP-embedded subgroups in finite groups [J]. J Mathematical Research and Exposition 2009, 9(6): 992-998

[7] Guo Wenbin, Xie Fengyan, Li Baojun. Some open questions in the theory of generalized permutable subgroups [J]. Science in China Series A, 2009, 52 (10): 2132-2144

[8] Huppert B. Endliche Gruppen I [M]. Berlin-New York: Springer-Verlag 1967.

[9] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[10] Wei Huaquan, Wang Yaming. On CAS-subgroups of finite groups [J]. Israel J Math, 2007, 159: 175-188

## A Note on CAP-embedded Subgroup

LI Changwen<sup>1</sup>, YU Qiu<sup>2</sup>

(1. School of Mathematical Science, Xuzhou Normal University, Xuzhou 221116, China)

(2. School of Science, Huahai Institute of Technology, Lianyungang 222001, China)

**Abstract** Suppose  $G$  is a finite group and  $H$  is a subgroup of  $G$ .  $H$  is said to be a CAP-subgroup of  $G$  if  $H$  covers or avoids every chief factor of  $G$ ;  $H$  is said to be a CAP-embedded subgroup of  $G$  if for each prime  $p$  dividing the order of  $H$ , there exists a CAP-subgroup  $K$  of  $G$  so that a Sylow  $p$ -subgroup of  $H$  is also a Sylow  $p$ -subgroup of  $K$ . We investigate the influence of CAP-embedded subgroups of prime power order on the  $p$ -nilpotency of finite groups. Some recent results are generalized.

**Key words** CAP-embedded subgroup;  $p$ -nilpotent; Sylow  $p$ -subgroup