

分数布朗运动下的可分离债券定价

李 军, 薛 红, 马惠馨

(西安工程大学理学院, 西安 710048)

摘 要: 假定股票价格服从分数布朗运动, 且无风险利率为时间的确定性函数, 股票价格的波动率为常数。利用分数布朗运动随机分析理论与方法, 建立股票价格服从分数布朗运动的金融市场数学模型, 并得到了可分离债券的定价公式。

关键词: 分数布朗运动; 可分离债券定价; 随机分析

中图分类号: O211.6 F830.9

文献标识码: A

引 言

可分离债券全称叫做“认股权和债券可分离交易的可转换公司债券”, 它指上市公司在发行公司债券的同时附有认股权证, 是公司债券加上认股权证的组合产品, 具有认股权证和可分离交易的特性。

可分离债券是我国一种新的金融工具, 2006年 11月 13日, 马钢股份作为首家尝试这一融资新品种的上市公司, 成功发行了 55 亿元分离交易式可转债。截至 2008 年 2 月 29 日止, 陆续有 20 家上市公司已实施或拟实施可分离债券融资, 其中发行量最高的中石化可分离债券融资规模高达 300 亿。由于其独特的优势, 可分离债券正发展成为大型上市公司后续融资的一种重要工具。认股权证不是一般意义下的欧式期权, 而是可延期权, 用股本摊薄效应的 B-S 模型对可分离债券进行定价很麻烦, 由于可分离债券在国内比较新, 关于可分离债券定价, 苗杰、师恪^[1]采用鞅方法对其进行定价。在通常金融市场模型中用分数布朗运动取代标准布朗运动早已被多数学者认同, 主要是由于分数布朗运动具有较好的“厚尾”和长程依赖特性, 而且仍然是一个高斯过程。关于分数布朗运动的随机分析理论可参见文献 [2-4]。本文假定资产服从分数布朗运动的金融市场数学模型, 运用分数布朗运动随机分析理论与方法, 得到了可分离债券的定价公式。

1 模型建立

假设某上市公司在 0 时刻发行了一种可分离债券, 在 T_0 时刻上市, 一上市之后就自动拆分为认股权证和债券, 且可分离债券的价格在 $[0, T_0]$ 内是变化的; 票面金额为 M 元/张, 债券期限为 n 年, 到期时刻为 T ; 每张可分离债券的最终认购人可以同时获得派发的 a 份认股权证, 权证的存续期为自认股权证上市之日起至 T_2 ; 持有人在权证存续期内拥有两次行权机会, 第一次在 T_1 时刻行权, 且 $T_0 < T_1 < T_2$, 行权比例为 $1:b_1$, 行权价格为 K_1 元/张; 第二次行权在 T_2 时刻行权, 且 $T_1 < T_2 < T$, 行权比例为 $1:b_2$, 行权价格为 K_2 元/张; 无违约风险, 不存在交易费用, 且在 T_1 或 T_2 时刻购得的股票立即出售, 并把所得收益以无风险利率存入银行。

由于可分离债券一上市就自动拆分为债券和认股权证, 就没有可分离债券了, 所以本文只考虑 $[0, T_0]$ 时间段内的可分离债券的定价。

认股权证的持有者在到期日 T_1 面临以下选择:

(1) 行使认股权证并收到支付

$$ab_1 \max\{0, S(T_1) - K_1\}$$

(2) 延长认股权证至到期日 T_2 , 有新的行权价格

K_2 , 在 T_1 时刻的收益为

$$\max\{0, ab_2 C(S, K_2, T_2 - T_1, T_2)\}$$

其中

$$C(S, K_2, T_2 - T_1, T_2)$$

收稿日期: 2010-06-21

基金项目: 陕西省教育厅自然科学基金资助项目 (09JK464)

作者简介: 李 军 (1982-), 女, 山东菏泽人, 硕士生, 主要从事随机分析与金融方面的研究。

$$= E[\exp(-\int_{T_1}^{T_2} (s) ds) \max\{Q S(T_2) - K_2\}]$$

因此持有认股权证在 T_1 时刻的收益为:

$$\max\{Q ab_2 C(S, K_2, T_2 - T_p, T_2), ab_1(S(T_1) - K_1)\}$$

在 T_1 时的最佳行为如下: 当 $S(T_1) > U$ 时行使认股权证, 当 $S(T_1) < U$ 时认股权证延长到 T_2 , 且当 $S(T_2) > K_2$ 时, 在 T_2 时刻行使认股权证, $S(T_2) < K_2$ 时, 不行使认股权证。其中 U 是下列方程的解:

$$ab_2 C(U, K_2, T_2 - T_p, T_2) = ab_1(U - K_1)$$

则持有者在到期日 T 时刻的现金流为

$$P(T) = \max\{Q ab_2 C(S, K_2, T_2 - T_p, T_2) + ab_1(S(T_1) - K_1)\} \exp(-\int_0^T (s) ds) + PB(T)$$

其中 $r(t)$ 为无风险利率, $PB(T)$ 为债券到期时刻的本金和利息之和, 且

$$PB(T) = M \exp(-\int_0^T (s) ds)$$

其中 $i(s)$ 为债券的票面利率。

2 金融市场模型

设当前时刻为 $t \in [0, T_0]$, $B(t)$ 是基础债券在 t 时刻的价格, $S(t)$ 是公司股票在 t 时刻的价格。在给定的风险中性概率空间 $(\Omega, F, \{F_t\}_{0 \leq t \leq T}, Q)$ 中, $B(t)$ 、 $S(t)$ 分别满足的随机微分方程为:

$$\begin{aligned} dB(t) &= r(t)B(t)dt \\ dS(t) &= S(t)(r(t)dt + \sigma dW^H(t)) \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $r(t)$ 为无风险利率, 是时间为 t 的确定性连续函数; σ 为股票波动率, 且为常数; $W^H(t)$ 是标准分数布朗运动; $\{F_t\}_{0 \leq t \leq T}$ 由 $B(t)$ 和 $S(t)$ 产生的满足通常条件的滤波。

引理 1^[5] 假定 $\omega_1 \sim N(0, 1)$, $\omega_2 \sim N(0, 1)$, $\text{cov}(\omega_1, \omega_2) = \rho$ 则对于任意的实数 $a, b, c, d, e, f, k_1, k_2$ 有下式成立

$$\begin{aligned} &E[\exp\{a\omega_1 + b\omega_2\} I_{c\omega_1 + d\omega_2 \geq k_1, e\omega_1 + f\omega_2 \geq k_2}] \\ &= \exp\{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + 2\rho ab)\} N(ac + bd + \rho ad + bc - k_p ae + bf + \rho(af + be) - k_2) \end{aligned}$$

其中 $N(\cdot, \cdot)$ 为二维标准正态分布的分布函数函数,

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$$

定理 1 随机微分方程 (1) 的解为:

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) \exp(\int_0^t (s) ds \\ &+ \sigma \int_0^t dW^H(s) + H \sigma^2 \int_0^t s^{H-1} ds) \end{aligned}$$

证明 由分数型 Ito 公式

$$d(\ln S(t)) = r(t)dt + \sigma dW^H(t) - H t^{H-1} \sigma^2 dt$$

所以

$$\begin{aligned} \ln S(t) - \ln S(0) &= \int_0^t (s) ds + \int_0^t dW^H(s) - H \sigma^2 \int_0^t s^{H-1} ds \end{aligned}$$

从而结论成立。

3 可分离债券定价

定理 2 设股票 $\{S(t), t \geq 0\}$ 在有效期内无红利支付, 则可分离债券在当前时刻 t 的价格为

$$\begin{aligned} P(t) &= ab_2 S(t) N(-\rho \sqrt{D_2} - \frac{d_1}{\sqrt{D_1}}, \sqrt{D_2} + \frac{d_2}{\sqrt{D_2}} \\ &- 1) - ab_2 K_2 \exp(-\int_t^{T_2} (s) ds) \cdot N(\frac{-d_1}{\sqrt{D_1}}, \frac{d_2}{\sqrt{D_2}} \\ &- 1) + ab_1 S(t) N(\frac{d_1 + D_1}{\sqrt{D_1}}) - ab_1 \cdot \\ &\exp(-\int_t^T (s) ds) K_1 N(\frac{d_1}{\sqrt{D_1}}) \\ &+ PB(T) \exp(-\int_t^T (s) ds) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} d_1 &= \ln \frac{S(t)}{U} + \int_t^{T_1} (s) ds - \frac{1}{2} \sigma^2 (T_1^H - t^H) \\ d_2 &= \ln \frac{S(t)}{K_2} + \int_t^{T_2} (s) ds - \frac{1}{2} \sigma^2 (T_2^H - t^H) \\ D_1 &= \sigma^2 (T_1^H - t^H), D_2 = \sigma^2 (T_2^H - t^H) \\ \rho &= \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{D_2}} \end{aligned}$$

证明 在风险中性条件下, 可分离债券在当前时刻 t 的价格为

$$\begin{aligned} P(t) &= E[\exp(-\int_t^T (s) ds) P(T)] \\ &= E[e^{-\int_t^{T_2} (s) ds} \max\{Q ab_2 C(S, K_2, T_2 - T_p, T_2) \\ &+ ab_1(S(T_1) - K_1)\} + PB(T) e^{-\int_t^T (s) ds}] \\ &= E[\exp(-\int_t^{T_2} (s) ds) ab_2 C(S, K_2, T_2 - T_p, T_2) \\ &I_{A_1}] + E[\exp(-\int_t^{T_1} (s) ds) ab_1(S(T_1) - K_1) I_{A_1}] \\ &+ PB(T) \exp(-\int_t^T (s) ds) \\ &= I_1 + I_2 + PB(T) \exp(-\int_t^T (s) ds) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} &C(S, K_2, T_2 - T_p, T_2) \\ &= \exp(-\int_t^{T_2} (s) ds) E[\max\{Q (S(T_2) - K_2)\} | F_{T_1}] \end{aligned}$$

$S(T_1) > U$ 等价于

$$\sigma(W^H(T_1) - W^H(t)) > \ln \frac{U}{S(t)} - \int_t^{T_1} (s) ds + \frac{1}{2} \sigma^2(T_1^H - t^H)$$

$S(T_2) > K_2$ 等价于

$$\sigma(W^H(T_2) - W^H(t)) > \ln \frac{K_2}{S(t)} - \int_t^{T_2} (s) ds + \frac{1}{2} \sigma^2(T_2^H - t^H)$$

$$\text{令 } A_1 = \{\sigma(W^H(T_1) - W^H(t)) > -d_1\}$$

$$A_2 = \{\sigma(W^H(T_1) - W^H(t)) < -d_1\}$$

$$A_3 = \{\sigma(W^H(T_2) - W^H(t)) > -d_2\}$$

$$A_4 = \{\sigma(W^H(T_2) - W^H(t)) < -d_2\}$$

由以上分析知

$$\begin{aligned} I_1 &= ab_2 \exp(-\int_t^T (s) ds) E[\max\{0(S(T_2) - K_2)\} | F_{T_1, A_1}] \\ &= ab_2 \exp(-\int_t^T (s) ds) E[S(T_2) I_{A_3, A_4}] \\ &\quad - ab_2 K_2 \exp(-\int_t^T (s) ds) E[I_{A_3, A_4}] = I_1^1 - I_1^2 \end{aligned}$$

由于 $\sigma(W^H(T_1) - W^H(t)) \sim N(0, \sigma^2(T_1^H - t^H))$,

$\sigma(W^H(T_2) - W^H(t)) \sim N(0, \sigma^2(T_2^H - t^H))$

故令

$$D_1 = \sigma^2(T_1^H - t^H), D_2 = \sigma^2(T_2^H - t^H)$$

$$\sigma(W^H(T_1) - W^H(t)) = \omega_1 \sqrt{D_1}$$

$$\sigma(W^H(T_2) - W^H(t)) = \omega_2 \sqrt{D_2}$$

其中 $\omega_1 \sim N(0, 1)$, $\omega_2 \sim N(0, 1)$

$$\rho = \text{cov}(\omega_1, \omega_2) = \frac{\sqrt{D_1}}{\sqrt{D_2}}$$

由引理 1 可得

$$\begin{aligned} I_1^1 &= ab_2 S(t) \exp(-\frac{1}{2} \sigma^2(T_2^H - t^H)) \\ &\quad E[\exp(\sigma(W^H(T_2) - W^H(t))) I_{A_3, A_4}] \\ &= ab_2 S(t) \exp(-\frac{1}{2} \sigma^2(T_2^H - t^H)) \\ &\quad E[\exp(\omega_2 \sqrt{D_2}) I_{(-\omega_1 > \frac{d_1}{\sqrt{D_1}}, \omega_2 > \frac{d_2}{\sqrt{D_2}})}] \\ &= ab_2 S(t) N(-\rho \frac{\sqrt{D_2}}{\sqrt{D_1}} - \frac{d_1}{\sqrt{D_1}}, \frac{d_2}{\sqrt{D_2}} - 1) \\ I_1^2 &= ab_2 K_2 \exp(-\int_t^T (s) ds) \\ &\quad E[\exp(0) I_{(-\omega_1 > \frac{d_1}{\sqrt{D_1}}, \omega_2 > \frac{d_2}{\sqrt{D_2}})}] \\ &= ab_2 K_2 \exp(-\int_t^T (s) ds) N(\frac{-d_1}{\sqrt{D_1}}, \frac{d_2}{\sqrt{D_2}} - 1) \\ I_2 &= ab_1 \exp(-\int_t^T (s) ds) E[S(T_1) I_{A_1}] \\ &\quad - ab_1 \exp(-\int_t^T (s) ds) K_1 E[I_{A_1}] \end{aligned}$$

$$= ab_1 S(t) \exp(-\frac{1}{2} \int_t^T (s) ds)$$

$$E[\exp(\int_t^{T_1} (s) dW^H(s)) I_{A_1}]$$

$$- ab_1 \exp(-\int_t^T (s) ds) K_1 E[I_{A_1}]$$

$$= ab_1 S(t) N(\frac{d_1 + D_1}{\sqrt{D_1}})$$

$$- ab_1 \exp(-\int_t^T (s) ds) K_1 N(\frac{d_1}{\sqrt{D_1}})$$

推论 当 $T_1 = T_2, K_1 = K_2, b_1 = b_2$ 时, 由定理 2 得到只有一次行权机会的可分离债券在 t 时刻的定价公式为:

$$\begin{aligned} P(t) &= ab_1 S(t) N(\frac{d_1 + D_1}{\sqrt{D_1}}) - ab_1 K_1 N(\frac{d_1}{\sqrt{D_1}}) \\ &\quad \exp(-\int_t^T (s) ds) + PB(T) \exp(-\int_t^T (s) ds) \end{aligned}$$

其中

$$d_1 = \ln \frac{S(t)}{K_1} + \int_t^T (s) ds - \frac{1}{2} \sigma^2(T_1^H - t^H)$$

$$D_1 = \sigma^2(T_1^H - t^H)$$

4 结束语

可分离债券的宣告发行显著提高公司市场价值, 对它定价的研究方法也会越来越多。在通常金融市场模型中用分数布朗运动取代标准布朗运动早已被多数学者认同, 所模拟的解更符合实际市场的需求。而现实的金融市场中随机事件太多, 不可能单靠分数布朗运动来刻画, 还可以在本文的基础上考虑更多的随机因素。

参考文献

- [1] 苗杰, 师恪. 连续时间下的可分离债券的定价[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(15): 1-6
- [2] Guasoni P. No arbitrage under transaction costs with fractional Brownian motion and beyond[J]. Mathematical Finance, 2006, 16(3): 569-582
- [3] Biagini F, Hu Y, Oksendal B, et al. Stochastic calculus for fractional Brownian motion and applications[M]. New York: Springer, 2008
- [4] Björk T, Hult H. A note on Wick products and the fractional Black-Scholes model[J]. Finance and Stochastics, 2005, 9(2): 197-209
- [5] 陈衡军. 一类亚式期权的定价[D]. 湖南师范大学, 2008

(下转第 665 页)

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

所以 T 为 A 上的压缩映射, 也是连续算子。

其次证明 T 为 E 上的自映射。对任意的 $x \in \Omega_5$, 当 $n \geq N$ 时, 由式 (10) 和式 (11), 得

$$Tx(n) \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad Tx(n) \geq 1$$

即

$$1 \leq Tx(n) \leq \frac{3}{2}$$

显然, 当 $N - r \leq n < N$ 时, 亦有 $1 \leq Tx(n) \leq \frac{3}{2}$ 。因而, $Tx \in \Omega_5$ 。即 T 为 A 上的自映射。

由 Banach 空间上的压缩映射原理可知, 存在一个 $x \in \Omega_5$, 使得 $Tx = x$ 。由式 (11) 知, 此不动点 x 满足

$$x(n) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=n+(2-i)\tau}^{n+2\tau-1} \sum_{s=t}^{\infty} \frac{(s-t+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s), & n \geq N \\ x(N), & N-r \leq n < N \end{cases}$$

当 $n \geq N$ 时, 利用上式可得

$$x(n) + x(n-\tau) = 2 + \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{s=i}^{\infty} \frac{(s-t+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s)$$

类似于情形 1, 有

$$\Delta^m (x(n) + x(n-\tau)) = (-1)^m q(s) \quad (13)$$

显然, 当 $N - r \leq n < N$ 时, 亦有式 (13) 成立。

由于 m 是奇数, 故序列 $x = \{x(n)\}_{n=N-r}^{\infty}$ 满足方程 (1)。由 Ω_5 的定义可知此解有界。情形 5 证毕。从而定理证毕。

参 考 文 献:

[1] Kulenovic M R S Hadopors S Existence of Nonscillatroy Solution of Second Order Linear Neutral Delay Equation [J]. Math App] 1998 228 436-448
 [2] Meng Q, Wang X N. Existence of Positive solutions for Difference Equations with variable Delays[J]. Journal of Shanxi University 2004 27(3): 230-232
 [3] 刘月华, 陈亚波. 二阶线性中立型时滞差分方程非振动解的存在性[J]. 湖南农业大学学报, 2000 27(2): 1-3
 [4] Dai B X Huang L H. Asymptotic Behavior and Existence of Positive Solutions of a Neutral Difference Equations [J]. Ann of Diff Eq's 1998 14(1): 22-30
 [5] 杨逢建, 刘洁纯. 具有可变时滞的偶数阶非线性中立型时滞差分方程的正解. 系统科学与数学, 2002 22(1): 86-89
 [6] 贺铁山. 一类具有可变时滞的高阶非线性中立型差分方程正解的存在性. 惠州学院学报, 2006 26(3): 21-26
 [7] 邓春红, 冯春华. 一类时滞差分方程正周期解的存在性 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2009, 22(1): 1-4

Existence of Final Positive Solutions of the High Order Nonautonomous Neutral Difference Equations

ZHENG Yun-li

(Foundational Department, Xuzhou B iengineering Polytechnic College, Xuzhou 221006, China)

Abstract By using the fixed point theorem, the paper studies the existence of final positive solutions of the high order nonautonomous neutral difference equations, a compacter sufficient condition than that in the previous papers is obtained

Key words higher order neutral difference equation, existence, bounded positive solution, Banach space

(上接第 662 页)

Pricing of Bond with Attached Warrant Under Fractional

LI Jun, XUE Hong, MA Huixin

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract Stocks price process is driven by fractional process, and risk-less rate is defined continuous function of time, the fluctuating rate is a constant. The pricing model of bond with attached warrant under fractional is built by fractional Brownian motion stochastic analysis theory and method, and the pricing formula of bond with attached warrant is obtained

Key words fractional Brownian motion, bond with attached warrant, stochastic analysis