

# 高阶非自治中立型差分方程的正解存在性

郑允利

(徐州生物工程职业技术学院基础部, 江苏 徐州 221006)

**摘要:** 利用不动点原理研究了  $|$  类高阶非自治中立型差分方程的正解存在性问题, 得到了该方程最终有界正解存在的  $|$  个充分条件, 这个充分条件较已有文献中的结论更简洁。

**关键词:** 高阶中立型差分方程; 存在性; 有界正解; Banach 空间

**中图分类号:** O175.7

**文献标识码:** A

## 引言

由于差分方程正解的存在条件与系统是否可解和振动性等许多问题密切相关, 因此对差分方程正解的存在性问题的研究也引起了大批学者的关注。一些学者对低阶中立型差分方程存在最终正解的条件作了研究<sup>[1-4 7]</sup>。但在高阶中立型差分方程最终正解存在条件方面, 由于难度大, 研究工作甚少。杨逢建<sup>[5]</sup>、贺铁山<sup>[6]</sup>分别研究了具有可变时滞的偶数阶、奇数阶中立型差分方程  $\Delta^m(x(n) - px(n-k)) + q(n)f(x(n-k(n))) = 0, n \geq n_0$  正解的存在性问题。其中  $m \geq 2, p$  为常数,  $q(n) \in R$  且  $\{q(n)\}$  不最终恒为零,  $l$  为正整数,  $k(n)$  为非负整数, 且  $\{k(n)\}$  有界; 当  $x \neq 0$  时,  $xf(x) > 0$  且存在常数  $L$ , 使

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|, \forall x, y \in R$$

都得到了如下结论:

假定  $p \neq \pm 1$ , 函数  $f(x)$  满足上式, 若有

$$\sum_{s=0}^{\infty} \sum_{t=s}^{\infty} \frac{(s-t+m-2)^{(m-2)}}{(m-2)!} q(s) < \infty$$

则该方程存在有界的最终正解。

在此基础上, 本文将讨论如下具有可变时滞的高阶非自治中立型差分方程正解的存在性问题

$$\Delta^m(x(n) - px(n-\tau)) + f(n, x(n-\sigma(n))) = 0, n \geq n_0 \quad (1)$$

其中  $m$  是正奇数,  $\tau$  是正整数,  $\{\sigma(n)\}$  为非负整数序列且有界,  $f(n, x): N \times R \rightarrow R$ , 对任意的  $n \geq n_0, f(n, x)$  对变量  $x$  连续,  $f(n, 0) = 0$  且当  $x \neq 0$  时,  $xf(n, x) > 0$ . 记  $\sigma = \max\{\sigma(n)\}, r = \max\{\tau, \sigma\}$ .

## 1 主要结果

**定理** 设  $p \neq 1$  且存在非负实数序列  $\{q(n)\}$ , 使得  $|f(n, x) - f(n, y)| \leq q(n)|x - y|, \forall x, y \in R^+, n \geq n_0$  若有

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} n^{m-1} q(n) < \infty \quad (2)$$

则方程 (1) 存在有界的最终正解。

**证明** 设  $E$  表示由所有实数序列  $x = \{x(n)\}_{n=N-r}^{\infty}$  构成的 Banach 空间, 范数定义为  $\|x\| = \sup_{n \geq N-r} |x(n)|$ 。

下面对  $p$  的不同情形进行讨论

首先引入记号

$$v^{(l)} = \prod_{i=0}^{l-1} (v - i), v \geq l \geq 1 \quad (3)$$

且规定  $v^{(0)} = 1$ 。

**情形 1**  $0 \leq p < 1$

由式 (2) 可知, 存在充分大的正整数  $N$ , 使得

$$\frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=N}^{\infty} n^{m-1} q(n) \leq \frac{1-p}{2} \quad (4)$$

记  $\Omega_1 = \{x \in E: 1 \leq x(n) \leq 2, n \geq N-r\}$ , 则  $\Omega_1$  是  $E$  的有界闭凸子集。定义算子  $T: \Omega_1 \rightarrow E$  如下

$$Tx(n) = \begin{cases} 1-p + px(n-\tau) + \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-n+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s), n \geq N \\ Tx(N)N-r \leq n < N \end{cases} \quad (5)$$

首先证明  $T$  为  $E$  上的压缩映射。对任意的  $x_1, x_2 \in \Omega_1$ , 当  $n \geq N$  时, 有

$$\begin{aligned} |Tx_1 - Tx_2| &\leq p|x_1(n-\tau)x_2(n-\tau)| \\ &+ \frac{1}{(m-1)!} \sum_{s=n}^{\infty} (s-n+1)^{(m-1)} q(s) |x_1 - x_2| \end{aligned}$$

$$\leq (p + \frac{1-p}{2}) \|x_1 - x_2\| = \frac{1+p}{2} \|x_1 - x_2\|$$

由此得

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\| &= \sup_{n \geq N-r} |Tx_1(n) - Tx_2(n)| \\ &= \sup_{n \geq N-r} |Tx_1(n) - Tx_2(n)| \leq \frac{1+p}{2} \|x_1 - x_2\| \quad (6) \end{aligned}$$

当  $N - r \leq n < N$  时, 对任意的  $x_1, x_2 \in \Omega_1$ , 有式(6)成立. 从而, 对任意的  $x_1, x_2 \in \Omega_1$ , 有

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \frac{1+p}{2} \|x_1 - x_2\|$$

因为  $0 < \frac{1+p}{2} < 1$ , 所以  $T$  为  $A$  上的压缩映射, 也是连续算子.

其次证明  $T$  为  $E$  上的自映射. 对任意的  $x \in \Omega_1$ , 当  $n \geq N$  时, 由式(4)和式(5), 得

$$Tx(n) \leq 1 - p + 2p + \frac{1-p}{2} = \frac{1+3p}{2} < 2$$

$$Tx(n) \geq 1 - p + p = 1$$

即

$$1 \leq Tx(n) < 2$$

显然, 当  $N - r \leq n < N$  时, 亦有  $1 \leq Tx(n) < 2$ . 因而,  $Tx \in \Omega_1$ . 即  $T$  为  $A$  上的自映射.

由 Banach 空间上的压缩映射原理可知, 存在一个  $x \in \Omega_1$ , 使得  $Tx = x$ . 由式(5)知, 此不动点  $x$  满足

$$x(n) = \begin{cases} 1 - p + px(n - \tau) + \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-n+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s), & n \geq N \\ x(N), & N - r \leq n < N \end{cases} \quad (7)$$

当  $n \geq N$  时, 有

$$x(n) - px(n - \tau) = 1 - p + \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-n+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s) \quad (8)$$

由式(3)可导出

$$(s-n)^{(m-1)} - (s-n+1)^{(m-1)} = (1-m)(s-n)^{(m-2)}$$

所以有

$$\Delta(x(n) - px(n - \tau)) = 1 - p + \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-n)^{(m-2)}}{(m-2)!} q(s)$$

由式(3)进一步可导出

$$(s-n-1)^{(m-2)} - (s-n)^{(m-2)} = (2-m)(s-n-1)^{(m-3)}$$

所以有

$$\Delta^2(x(n) - px(n - \tau)) = \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-n-1)^{(m-3)}}{(m-3)!} q(s)$$

对式(8)作  $m$  次差分且由递推关系得

$$\Delta^m(x(n) - px(n - \tau)) = (-1)^m q(s) \quad (9)$$

显然, 当  $N - r \leq n < N$  时, 亦有式(9)成立.

由于  $m$  是奇数, 故序列  $x = \{x(n)\}_{n=N-r}^{\infty}$  满足方程(1). 又  $1 \leq x(n) \leq 2$ , 故此不动点  $x$  是方程(1)的一个有界正解.

情形 2  $p > 1$

由式(2)可知, 存在充分大的正整数  $N$ , 使得

$$\frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=N}^{\infty} n^{m-1} q(n) \leq \frac{p-1}{2}$$

记  $\Omega_2 = \{x \in E: \frac{p-1}{2} \leq x(n) \leq p, n \geq N-r\}$ , 则  $\Omega_2$  是  $E$  的有界闭凸子集. 定义算子  $T: \Omega_2 \rightarrow E$  如下

$$Tx(n) = \begin{cases} 1 - p + \frac{1}{p} x(n - \tau) + \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-n+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s), & n \geq N \\ Tx(N), & N - r \leq n < N \end{cases}$$

情形 3  $-1 < p \leq 0$

由式(2)可知, 存在充分大的正整数  $N$ , 使得

$$\frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=N}^{\infty} n^{m-1} q(s) \leq \frac{p+1}{4}$$

记  $\Omega_3 = \{x \in E: 3(p+1) \leq x(n) \leq 4, n \geq N-r\}$ , 则  $\Omega_3$  是  $E$  的有界闭凸子集. 定义算子  $T: \Omega_3 \rightarrow E$  如下

$$Tx(n) = \begin{cases} 3 - p + px(n - \tau) + \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-n+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s), & n \geq N \\ Tx(N), & N - r \leq n < N \end{cases}$$

情形 4  $p < -1$

由式(2)可知, 存在充分大的正整数  $N$ , 使得

$$\frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=N}^{\infty} n^{m-1} q(s) \leq \frac{p(p+1)}{4}$$

记  $\Omega_4 = \{x \in E: -3(p+1) \leq x(n) \leq -4p, n \geq N-r\}$ , 则  $\Omega_4$  是  $E$  的有界闭凸子集. 定义算子  $T: \Omega_4 \rightarrow E$  如下

$$Tx(n) = \begin{cases} 3 - p + \frac{1}{p} x(n - \tau) + \frac{1}{p} \sum_{s=n}^{\infty} \frac{(s-n+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s), & n \geq N \\ Tx(N), & N - r \leq n < N \end{cases}$$

利用与情形 1 类似的证明方法, 可以证明情形 2, 3, 4 也成立.

情形 5  $p = -1$

由式(2)可知, 存在充分大的正整数  $N$ , 使得

$$\frac{1}{(m-1)!} \sum_{n=N}^{\infty} n^{m-1} q(s) \leq \frac{1}{2} \quad (10)$$

记  $\Omega_5 = \{x \in E: 1 \leq x(n) \leq \frac{3}{2}, n \geq N-r\}$ , 则  $\Omega_5$  是  $E$  的有界闭凸子集. 定义算子  $T: \Omega_5 \rightarrow E$  如下

$$Tx(n) = \begin{cases} 1 + \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{l=m+(2l-1)\tau}^{n+2l-1} \sum_{s=t}^{\infty} \frac{(s-t+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s), & n \geq N \\ Tx(N), & N - r \leq n < N \end{cases} \quad (11)$$

首先证明  $T$  为  $E$  上的压缩映射. 对任意的  $x_1, x_2 \in \Omega_5$ , 当  $n \geq N$  时, 有

$$\begin{aligned} &|Tx_1(n) - Tx_2(n)| \\ &\leq \sum_{l=N+\tau}^{\infty} \sum_{s=l}^{\infty} \frac{(s-t+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s) \|x_1 - x_2\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} \|Tx_1 - Tx_2\| &= \sup_{n \geq N-r} |Tx_1(n) - Tx_2(n)| \\ &= \sup_{n \geq N} |Tx_1(n) - Tx_2(n)| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\| \quad (12) \end{aligned}$$

当  $N - r \leq n < N$  时, 对任意的  $x_1, x_2 \in \Omega_5$ , 有式(12)成立. 从而, 对任意的  $x_1, x_2 \in \Omega_5$ , 有

$$\|Tx_1 - Tx_2\| \leq \frac{1}{2} \|x_1 - x_2\|$$

所以  $T$  为  $A$  上的压缩映射, 也是连续算子。

其次证明  $T$  为  $E$  上的自映射。对任意的  $x \in \Omega_5$ , 当  $n \geq N$  时, 由式 (10) 和式 (11), 得

$$Tx(n) \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad Tx(n) \geq 1$$

即

$$1 \leq Tx(n) \leq \frac{3}{2}$$

显然, 当  $N - r \leq n < N$  时, 亦有  $1 \leq Tx(n) \leq \frac{3}{2}$ 。因而,  $Tx \in \Omega_5$ 。即  $T$  为  $A$  上的自映射。

由 Banach 空间上的压缩映射原理可知, 存在一个  $x \in \Omega_5$ , 使得  $Tx = x$ 。由式 (11) 知, 此不动点  $x$  满足

$$x(n) = \begin{cases} 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{t=n+(2-i)\tau}^{n+2\tau-1} \sum_{s=t}^{\infty} \frac{(s-t+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s), & n \geq N \\ x(N), & N-r \leq n < N \end{cases}$$

当  $n \geq N$  时, 利用上式可得

$$x(n) + x(n-\tau) = 2 + \sum_{i=n}^{\infty} \sum_{s=i}^{\infty} \frac{(s-t+1)^{(m-1)}}{(m-1)!} q(s)$$

类似于情形 1, 有

$$\Delta^m (x(n) + x(n-\tau)) = (-1)^m q(s) \quad (13)$$

显然, 当  $N - r \leq n < N$  时, 亦有式 (13) 成立。

由于  $m$  是奇数, 故序列  $x = \{x(n)\}_{n=N-r}^{\infty}$  满足方程 (1)。由  $\Omega_5$  的定义可知此解有界。情形 5 证毕。从而定理证毕。

参 考 文 献:

[1] Kulenovic M R Š Hadopoulos S Existence of Nonscillatroy Solution of Second Order Linear Neutral Delay Equation [J]. Math App] 1998 228 436-448  
 [2] Meng Q, Wang X N. Existence of Positive solutions for Difference Equations with variable Delays[J]. Journal of Shanxi University 2004 27(3): 230-232  
 [3] 刘月华, 陈亚波. 二阶线性中立型时滞差分方程非振动解的存在性[J]. 湖南农业大学学报, 2000 27(2): 1-3  
 [4] Dai B X Huang L H. Asymptotic Behavior and Existence of Positive Solutions of a Neutral Difference Equations [J]. Ann of Diff Eq's 1998 14(1): 22-30  
 [5] 杨逢建, 刘洁纯. 具有可变时滞的偶数阶非线性中立型时滞差分方程的正解. 系统科学与数学, 2002 22(1): 86-89  
 [6] 贺铁山. | 类具有可变时滞的高阶非线性中立型差分方程正解的存在性. 惠州学院学报, 2006 26(3): 21-26  
 [7] 邓春红, 冯春华. | 类时滞差分方程正周期解的存在性 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2009, 22(1): 1-4

## Existence of Final Positive Solutions of the High Order Nonautonomous Neutral Difference Equations

ZHENG Yun-li

(Foundational Department, Xuzhou B iengineering Polytechnic College, Xuzhou 221006, China)

**Abstract** By using the fixed point theorem, the paper studies the existence of final positive solutions of the high order nonautonomous neutral difference equations, a compacter sufficient condition than that in the previous papers is obtained

**Key words** higher order neutral difference equation, existence, bounded positive solution, Banach space

(上接第 662 页)

## Pricing of Bond with Attached Warrant Under Fractional

LI Jun, XUE Hong, MA Huixin

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

**Abstract** Stocks price process is driven by fractional process, and risk-less rate is defined continuous function of time, the fluctuating rate is a constant. The pricing model of bond with attached warrant under fractional is built by fractional Brownian motion stochastic analysis theory and method, and the pricing formula of bond with attached warrant is obtained

**Key words** fractional Brownian motion, bond with attached warrant, stochastic analysis