

Engel 序列的误差和函数性质研究

李 伟, 周玉元, 桑宝祥, 方海泉

(湖南农业大学理学院, 长沙 410128)

摘 要: 文章定义了 Engel 序列的误差和函数, 得到了 $|$ 类处处左连续, 但在某类可数点不右连续的函数, 并得到了该函数的积分值和 Hausdorff 维数, 完善了误差和函数的理论体系。

关键词: Engel 序列; 误差和函数; 连续; Hausdorff 维数

中图分类号: O173.1; O174.41

文献标识码: A

引 言

对任意的 $x \in (0, 1]$, 令 $d_1(x) \in \mathbb{N}$, 定义 $T(x) \in (0, 1]$ 为

$$\frac{1}{d_1(x)} < x \leq \frac{1}{d_1(x) - 1}$$

$$T(x) = \left(x - \frac{1}{d_1(x)}\right) d_1(x) \quad (1)$$

从而 $d_1(x) = \left[\frac{1}{x}\right] + 1$ 其中 $[j]$ 表示取整数部分。定义

$$d_n(x) = d_1(T^{n-1}(x)) \quad (2)$$

这里 T^n 表示 T 的第 n 次迭代 ($T^0 = Id_{(0,1]}$), 因此, 对任意的 $x \in (0, 1]$, 均可展成无穷级数形式

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{d_1(x)d_2(x)\dots d_n(x)} \quad (3)$$

我们称它为 x 的 Engel 展开, 记为 $x = [d_1(x), d_2(x), \dots, d_n(x), \dots]_{\text{Engel}}$ 。

Engel 展开最早由 Engel F. 提出, 他给出了 Engel 展开的一些基本性质^[1]; 1976 年, Galanbos G 进一步完善了该算法的度量性质^[2], 在此基础上, Y. Y. Liu 和 J. Wu^[3], L. M. Shen 讨论了 Engel 展开的若干例外集的维数^[4]。

$$\text{记 } r_n(x) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{d_1(x)d_2(x)\dots d_i(x)}$$

显然有

$$x = r_n(x) + \frac{T^n(x)}{d_1(x)d_2(x)\dots d_n(x)} \quad (4)$$

对于任意的 $x \in (0, 1]$, 定义

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (x - r_n(x)), \quad (5)$$

我们称它为 x 的 Engel 展开的误差和函数, 对任意的 $j \geq 1$, $d_{j+1}(x) \geq d_j(x) \geq 2$ ^[1], 从而 (5) 是收敛的级数, 故 $S(x)$ 有意义, 关于误差和函数的研究, 最早由 J. N. Ridley 和 G. Petruska 对连分数误差和函数的研究展开^[5], 但是, 并没有得到误差和函数图像的 Hausdorff 维数, 2006 年, L. M. Shen 和 J. Wu 研究了 Luoth 展开误差和函数的性质^[6], 并且得到了该函数的维数, 在 Luoth 展开中, 数字 $\{d_j\}_{j=1}^{\infty}$ 可以取 $\mathbb{N} \setminus \{1\}$ 中的任意一个数, 而对于 Engel 展开, 数字是单调递增的, 即 $d_{j+1} \geq d_j \geq 2$ 这与 Luoth 展开有很大的区别, 因此, 本文将研究 Engel 展开误差和 $S(x)$ 的一些基本性质及函数图像的 Hausdorff 维数, 进一步完善误差和函数体系。

1 $S(x)$ 的一些基本性质

首先, 我们定义一个符号空间, 对任意 $n \geq 1$, 令

$$D_n = \{(\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{N}^n : \sigma_k \geq 2, 1 \leq k \leq n\}$$

$$D = \bigcup_{n=0}^{\infty} D_n, (D_0 = \emptyset)$$

对任意的 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \in D_n$, 记

$$A_\sigma = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} + \dots + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n} \quad (6)$$

$$B_\sigma = A_\sigma + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n(\sigma_n - 1)} \quad (7)$$

Engel 展开的 n -阶基本区间 J_σ 表示为

$$J_\sigma = \{x \in (0, 1] : d_1(x) = \sigma_1, \dots, d_n(x) = \sigma_n\} \quad (8)$$

可知 $J_\sigma = (A_\sigma, B_\sigma]$, 最后我们定义

$$I = \{A_\sigma, B_\sigma, \sigma \in D_n, n \geq 1\} \quad (9)$$

引理 1.1 $x \in I$ 的充要条件为 x 是以 2 为最终的.

证明 充分性: 假设 x 是以 2 为最终的, 则存在某个 m , 使得对于一切 $n > m$ 时, 有 $d_n(x) = 2$. 此时, x 可以表示为

$$x = \sum_{i=1}^m \frac{1}{d_1(x)d_2(x)\dots d_i(x)} + \frac{1}{C}$$

其中 $C = d_1(x)d_2(x)\dots d_{n-1}(x)$, 后面的 C 与此相同.

必要性证明为上述逆过程.

引理 1.2 对任意的 $x \in (0, 1]$, $0 < S(x) \leq x$; 对

$$\text{任意的 } n \geq 1, S(x) = \sum_{i=1}^n (x - r_i(x)) + \frac{S(T^n x)}{d_1(x)\dots d_n(x)}.$$

证明 1) 由 (4) 可得

$$S(x) \leq \frac{1}{d_1(x)} + \frac{1}{d_1(x)d_2(x)} + \dots = x$$

2) 由 (4) 可得

$$x - r_n(x) = \frac{T^n(x)}{d_1(x)d_2(x)\dots d_n(x)}$$

$$S(x) = \sum_{i=1}^n (x - r_i(x)) + \frac{S(T^n(x))}{d_1(x)\dots d_n(x)}$$

推论 1.3 $S(x)$ 是有界的.

定理 1.4 对任意的 $x \in (0, 1)$, $S(x)$ 在 x 左连续, 但不右连续.

证明 对任意的 $n \geq 1$ 和 $\sigma \in D_n$, 记 $x_1 = A_\sigma$, 又 $T^n(x_1) = 1$, 则 x_1 的 Engel 序列展式可以表示为 $x_1 = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, 2, 2, 2, \dots]_{L_0}$.

$$S(x_1) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_1 - r_i(x_1)) + \frac{1}{C\sigma_n}$$

对任意的 $x' \in J_\sigma$, 记

$$x' = x_1 + \frac{1}{C\sigma_n(\sigma_n - 1)\alpha} \quad \alpha \geq 1$$

令 $\frac{1}{\alpha} = [[\alpha] + 1, d_2(\alpha), \dots]_{L_1}$ 为 $\frac{1}{\alpha}$ 的 Engel 展

式, 则

$$x' = [\sigma_1, \dots, \sigma_n, [\alpha] + 1, d_2(\alpha), \dots]_{L_1}$$

$$\text{而 } r_i(x_1) = r_i(x'_1), \quad 1 \leq i \leq n-1$$

由

$$S(x'_1) = \sum_{i=1}^{n-1} (x'_1 - r_i(x'_1)) + (x'_1 - x_1) + \frac{T^{n+1}(x'_1) + S(T^{n+1}(x'_1))}{C\sigma_n([\alpha] + 1)}$$

令 $\alpha \rightarrow \infty$ 我们有

$$\lim_{x'_1 \rightarrow x_1} S(x'_1) = S(x_1) - \frac{1}{C\sigma_n}$$

这表明 $S(x)$ 在 x_1 不右连续.

下面证 $S(x)$ 在 x_1 左连续.

对任意的 $\beta > 1$ 记

$$x''_1 = \frac{1}{\sigma_1} + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}(\sigma_n + 1)} + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_{n-1}\sigma_n(\sigma_n + 1)([\beta] + 1)} + \dots$$

$$S(x''_1) = \sum_{i=1}^{n-1} (x''_1 - r_i(x''_1)) + (x''_1 - r_n(x''_1)) + \frac{1}{\beta} + S\left(\frac{1}{\beta}\right) + \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_n(\sigma_n + 1)}$$

因而

$$S(x_1) - S(x''_1) = \frac{n}{C(\sigma_n + 1)} - \frac{n}{C(\sigma_n + 1)\beta} + \frac{n}{C\sigma_n} - \frac{1}{C\sigma_n} + S\left(\frac{1}{\beta}\right) - S\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

由引理知, 当 $\beta \rightarrow 1^+$ 时, $S(x''_1) \rightarrow S(x_1)$.

对 $x_2 = B_\sigma$, 我们有 $x_2 = [\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}, \sigma_n, 2, 2, \dots]_{L_0}$. 采用类似的办法可以证明 $S(x)$ 在 x_2 左连续, 但不右连续.

引理 1.5 对任意的 $n \geq 1$ 和 $\sigma \in D_n$, 记 $x_1 = A_\sigma$, $x_2 = B_\sigma$, 则对任意的 $x \in J_\sigma$, $S^*(x_1) < S(x) \leq S(x_2)$,

其中 $S^*(x_1) = S(x_1) - \frac{1}{C\sigma_n}$.

证明 对任意的 $x \in J_\sigma$, 记

$$x' = x_1 + \frac{1}{C\sigma_n(\sigma_n - 1)\alpha} \quad \alpha \geq 1$$

而

$$S(x_1) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_1 - r_i(x_1)) + \frac{1}{C\sigma_n}$$

$$S(x_2) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_2 - r_i(x_2)) + \frac{1}{C(\sigma_n - 1)}$$

$$S(x) = \sum_{i=1}^{n-1} (x - r_i(x)) + (x - x_1) + \frac{T^{n+1}(x) + S(T^{n+1}(x))}{C\sigma_n([\alpha] + 1)}$$

故由引理 1.2 及 $\alpha \geq 1$ 可得

$$S(x) - S^*(x_1) > 0, \quad S(x_2) - S(x) \geq 0$$

引理 1.6 $\sup_{x, y \in J_\sigma} |S(x) - S(y)| = (n+1)\lambda(J_\sigma)$, 其中 $\lambda(J_\sigma)$ 为 J_σ 的 Lebesgue 测度.

证明 由引理 1.5 有对任意的

$$\sigma \in D_n, \sup_{x, y \in J_\sigma} |S(x) - S(y)| = S(x_2) - S^*(x_1) = \frac{(n+1)}{C(\sigma_n - 1)\sigma_n} = (n+1)\lambda(J_\sigma)$$

$$\text{定理 1.7 } \int_0^1 S(x) dx = \frac{\pi^2 - 9}{12 - \pi^2}$$

证明

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{2} - [1 - (\frac{\pi^2}{6} - 1)] + (\frac{\pi^2}{6} - 1) \int_0^1 f(x) dx$$

从而

$$\int_0^1 f(x) dx = \frac{\pi^2 - 9}{12 - \pi^2}$$

2 $S(x)$ 的图像的维数

定义 2.1^[7] 设 (X, d) 为度量空间, 若 U 为 X 的子集, $|U| = \sup\{|x - y| : x, y \in U\}$ 表示的直径, 设 $E \subset \cup_i U_i, 0 < |U_i| \leq \delta$ 则称 $\{U_i\}$ 为 E 的一个 δ 覆盖. 令 $E \subset X, s \geq 0$ 对任意的 $\delta > 0$ 定义 $H_\delta^s(E) = \inf\{\sum_{i=1}^\infty |U_i|^s : \{U_i\}_{i \geq 1} \text{ 为 } E \text{ 的 } \delta \text{ 覆盖}\}$. 这里对所有的 δ 覆盖取下确界, 当 $\delta \rightarrow 0$ 时, 有 $H^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_\delta^s(E)$. 则 $H^s(E)$ 称为 E 的 s - 维 Hausdorff 测度. 定义

$$\begin{aligned} \dim_H E &= \sup\{s | H^s(E) > 0\} \\ &= \sup\{s | H^s(E) = +\infty\} \\ &= \inf\{s | H^s(E) < \infty\} \\ &= \inf\{s | H^s(E) = 0\} \end{aligned}$$

为集合 E 的 Hausdorff 维数, 并记为 $\dim_H E$.

记 $Gr(S) = \{(x, S(x)), x \in (0, 1]\}$.

定理 2.1 $\dim_H Gr(S) = 1$

证明 对任意的 $n \geq 1, \{J_\sigma \times S(J_\sigma), \sigma \in D_\sigma\}$ 为 $Gr(S)$ 的一个覆盖. 由于 $J_\sigma \times S(J_\sigma)$ 能被 $n+1$ 个边长为 $\lambda(J_\sigma)$ 的正方形覆盖, 对任意的 $\varepsilon > 0, H^{1+\varepsilon}(Gr(S)) \leq$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \inf (n+1) (\sqrt{2})^{1+\varepsilon} 2^{-n\varepsilon} = 0$$

因而 $\dim_H Gr(S) \leq 1$

由于投影为 Lipschitz 映射, $\dim_H Gr(S) \geq 1$ 因此 $\dim_H Gr(S) = 1$.

参考文献:

[1] Engel F. Entwicklung der Zahlen nach Stammbruechern, Verhandlungen der Versammlung deutscher Philologen und Schulmaenner in M anburg[J]. 1913, 52: 190-191

[2] Galambos J. Representations of Real Numbers by infinite series Lecture Notes in Math[M]. vol 502, New York: Springer, 1976

[3] Liu Y Y, Wu J. Some exceptional sets in Engel expansions[J]. Acta Arith, 2003, 99: 79-83

[4] Shen L M. A further discussion of the Hausdorff dimension in Engel expansions[J]. Acta Arith, 2010, 143: 271-276

[5] Ridley J N, Petruska G. The error-sum function of continued fractions[J]. Indagationes Mathematicae, 2000, 11(2): 273-282

[6] Shen L M, Wu J. On the error-sum function of Luoth series[J]. J Math Anal Appl, 2007, 329: 1440-1445

[7] Falconer K J. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Application[M]. Wiley Ltd: Chichester, 1990

On the Error-sum Function of Engel Series

LI Wei, ZHOU Yu-yuan, SANG Bao-xiang, FANG Hai-quan

(College of Science, Hunan Agricultural University, Changsha 410128, China)

Abstract In this paper, the error-sum function of Engel series is defined. It is a kind of function which is left continuous at each $x \in (0, 1]$, but not right continuous at some kind of countable points set. The integral value and the graph dimension of the function are also computed, which enriches the theory of error-sum function.

Keywords Engel series; error-sum function; integral value; Hausdorff dimension