文章编号: 1673-1549(2010)06-0654-03

非线性三点边值问题对称正解的存在性与多解性

陈春香[1], 徐四委[2]

(1.中国矿业大学理学院, 江苏 徐州 221116; 2.辽宁大学信息科学与技术学院, 沈阳 110036)

摘 要: 为了研究非线性三点边值问题, 利用不动点定理及单调迭代法, 探讨了该问题对称正解的存在性与多解性, 不仅得到了该边值问题存在 $2n$ (n为自然数) 个对称正解, 而且还给出了逼近于这些解的迭代格式。

关键词: 对称正解; 单调迭代序列; 多解性
中图分类号: O175.8 文献标识码: A

引 言

本文讨论下列三点边值问题的对称正解

$$\begin{cases} u''(t)+f(t,u(t))=0, & 0\leqslant t\leqslant 1, \\ u(t)=u(1-t),\ u'(0)-u'(1)=u(\frac{1}{2}) \end{cases} \quad (1)$$

其中(1)的对称正解 u 指 $u(t)=u(1-t)$, $t\in[0,1]$ 且 $u(t)>0$, $t\in(0,1)$。

非线性方程对称正解的存在性很多学者作了研究, 见文献[1-8], 其中文献[2-4]用的是单调迭代法, 但是他们研究的都是两点边值问题。在文献[6]中, 孙永平对此问题进行了研究, 他利用椎压缩锥拉伸不动点定理得出了该问题至少有一个或两个正解, 本文通过对 f 增加限制条件并用单调迭代法得出该问题存在 $2n$ 个对称正解, 同时还给出了逼近于这些解的迭代格式。

本文假设:

(H_1) $f:[0,1]\times[0,\infty)\to[0,\infty)$ 连续并且有 $f(t,u)=f(1-t,u)$, $t\in[0,1]$;

(H_2) 若 $0\leqslant u_1\leqslant u_2$, 则 $f(t,u_1)\leqslant f(t,u_2)$, $t\in[0,1]$。

1 预备知识和引理

设 Banach 空间 $C[0,1]$ 中范数为 $\|u\|=\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|u(t)|$, 称函数 $u\in C[0,1]$ 是凹的, 如果对于任意的 $t_1, t_2, \tau\in[0,1]$ 都有

$$u(\tau t_1+(1-\tau)t_2)\geqslant \tau u(t_1)+(1-\tau)u(t_2)$$

称函数 $u\in C[0,1]$ 是对称的, 如果对于任意的 $t\in C[0,1]$ 都有 $u(t)=u(1-t)$。

记 $C^+[0,1]=\{u(t)\in C[0,1]: u(t)\geqslant 0, t\in[0,1]\}$

在 $C[0,1]$ 中定义锥 K 为:

$$K=\{u(t)\in C[0,1]: u(t)\text{是对称的, 凹的且 } u(t)\geqslant q(t)\|u\|, t\in[0,1]\}$$

其中 $q(t)=\min\{t,(1-t)\}$, $t\in[0,1]$。

引理 1.1 若 $h(t)\in C^+[0,1]$ 且是对称的, 则边值问题

$$\begin{cases} u''(t)+h(t)=0, & 0<t<1, \\ u(t)=u(1-t),\ u'(0)-u'(1)=u(\frac{1}{2}) \end{cases}$$

有唯一一个对称正解 $u(t)=\int_0^1 G(t,s)h(s)ds$, 其中

$$G(t,s)=G_1(t,s)+G_2(s) \quad (2)$$

$$G_1(t,s)=\begin{cases} s(1-t) & 0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1 \\ t(1-s) & 0\leqslant t\leqslant s\leqslant 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$G_2(s)=\begin{cases} 1-\frac{(s}{2)} & 0\leqslant s\leqslant \frac{1}{2} \\ \frac{(1+s)}{2} & \frac{1}{2}\leqslant s\leqslant 1 \end{cases} \quad (4)$$

通过计算得

$$\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)ds=1,\ \max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}} G(t,s)ds=\frac{17}{32}$$

收稿日期: 2010-09-10
作者简介: 陈春香(1984-), 女, 江苏徐州人, 硕士生, 主要从事常微分方程边值问题方面的研究。

引理 1.2 由式(2)、(3)、(4)得格林函数的性质:

1. $G(t,s)\geqslant 0, t,s\in[0,1], G(t,s)>0, t,s\in(0,1)$。
2. $G(t,s)=G(1-t,1-s), t,s\in[0,1]$。
3. $G(s,s)\geqslant G(t,s)\geqslant q(t)G(s,s)$,
   $q(t)=\min\{t,(1-t)\}, t,s\in[0,1]$。
4. 对任意的 $t_1, t_2, s\in[0,1]$, 有
   $|G(t_1,s)-G(t_2,s)|\leqslant|t_1-t_2|$。

证明 性质 1, 性质 2, 性质 4和性质 3的第一个不等式很容易得出, 下面证明性质 3的第二个不等式:

当 $t\in[0,1], s\in[0,\frac{1}{2}]$, 则

$$G(t,s)=G_1(t,s)+G_2(s)\geqslant G_2(s)$$
$$=1-\frac{s}{2}=\frac{t}{2}(2-s)+(1-t)(1-\frac{s}{2})$$
$$\geqslant ts(1-s)+(1-t)(1-\frac{s}{2})$$
$$\geqslant\min\{t,1-t\}[s(1-s)+(1-\frac{s}{2})]$$
$$=q(t)G(s,s)$$

当 $t\in[0,1], s\in[\frac{1}{2},1]$, 同理可得 $G(t,s)\geqslant q(t)G(s,s)$, 证毕。

定义算子 $T: C^+[0,1]\to C^+[0,1]$ 如下:

$$Tu(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds, t\in[0,1] \quad (5)$$

引理 1.3 假设 (H_1)、(H_2) 成立, 则 $T: K\to K$ 是全连续映射。

证明过程类似于[3], 故略。

2 主要结果

定理 2.1 假设 (H_1)、(H_2) 成立, 并且存在 $0<\frac{32}{17}b<a$ 使得 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}f(t,a)\leqslant a$, $\min\limits_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}f(t,\frac{b}{4})\geqslant\frac{32b}{17}$, 则边值问题(1)有两个对称正解 u^*、$v^*\in K$ 使得 $b\leqslant\|u^*\|\leqslant a$, $b\leqslant\|v^*\|\leqslant a$, 其中 $u^*=\lim\limits_{k\to\infty}T^k u_0$, $u_0=a$, $v^*=\lim\limits_{k\to\infty}T^k v_0$, $v_0=bq(t)$, $t\in[0,1]$。

证明 记 $K[b,a]=\{u\in K: b\leqslant\|u\|\leqslant a\}$, 设 $u\in K[b,a]$, 则

$$f(t,u(t))\leqslant f(t,a)\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}f(t,a)\leqslant a, t\in[0,1],$$
$$f(t,u(t))\geqslant f(t,\frac{b}{4})\geqslant\min_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}f(t,\frac{b}{4})\geqslant\frac{32b}{17}, t\in[\frac{1}{4},\frac{3}{4}]$$

则

$$\|Tu\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds$$
$$\leqslant a\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)ds=a,$$
$$\|Tu\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s))ds$$
$$\geqslant\frac{32b}{17}\max_{0\leqslant t\leqslant 1}\int_{\frac{1}{4}}^{\frac{3}{4}}G(t,s)ds=b,$$

所以 $T(K[b,a])\subset K[b,a]$。

令 $u_0(t)=a, 0\leqslant t\leqslant 1$, 则 $u_0(t)\in K[b,a]$。定义 $u_1=Tu_0, u_{n+1}=Tu_n, n=1,2\cdots$, 则 $u_n\in T(K[b,a])\subset K[b,a], n=1,2\cdots$。

因为 T 是全连续算子, 则在序列 $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中一定存在收敛子列 $\{u_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $u^*\in K[b,a]$ 使得 $u_{n_k}\to u^*$, $n=1,2\cdots$。因为 $u_1\in K[b,a]$, $u_1=Tu_0\leqslant a=u_0$, 由(5)及 (H_2) 得 $u_2=Tu_1\leqslant Tu_0=u_1$, 由归纳法得 $u_{n+1}(t)\leqslant u_n(t)$, $t\in[0,1]$, $n=1,2\cdots$ 知 $\{u_n\}$ 是递减序列, 所以有 $u_n\to u^*$ 及 $Tu^*=u^*$。因为 $u^*\in K[b,a]$, 所以 $u^*\geqslant q(t)\|u^*\|>0$, $t\in(0,1)$。

令 $v_0=bq(t)$, $t\in[0,1]$, $v_1=Tv_0$, 因为 $\min\limits_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}v_0(t)\geqslant\frac{b}{4}$ 且 $\|v_0\|=\frac{b}{2}\leqslant a$, 由上述证明知 $v_1\in K[b,a]$. 定义序列如下: $v_{n+1}=Tv_n$, $n=1,2\cdots$。因为 $T: K[b,a]\to K[b,a]$, 所以 $v_n\in K[b,a]$, $n=1,2\cdots$。因为 T 是全连续算子, 则在序列 $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ 中一定存在收敛子列 $\{v_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ 和 $v^*\in K[b,a]$ 使得 $v_{n_k}\to v^*$, $n=1,2\cdots$。

因为 $v_1\in K[b,a]$, $v_1\geqslant bq(t)=v_0$, 由(5)及 (H_2) 得 $v_2=Tv_1(t)\geqslant Tv_0(t)=v_1(t)$, 由归纳法得 $v_{n+1}(t)\geqslant v_n(t)$, $t\in[0,1]$, $n=1,2\cdots$。知 $\{v_n\}$ 是递增序列, 所以有 $v_n\to v^*$ 及 $Tv^*=v^*$。因为 $v^*\in K[b,a]$, 所以 $v^*\geqslant q(t)\|v^*\|>0$, $t\in(0,1)$。

因为算子 T 的不动点就是边值问题(1)的解, 所以 u^* 和 v^* 是边值问题(1)的两个对称正解。

定理 2.2 假设 (H_1)、(H_2) 成立, 存在 $2n$ 个正数 $\frac{32}{17}b_1<a_1<\frac{32}{17}b_2<a_2<\cdots<\frac{32}{17}b_n<a_n$, 使得 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}f(t,a_i)\leqslant a_i$, $\min\limits_{\frac{1}{4}\leqslant t\leqslant\frac{3}{4}}f(t,\frac{b_i}{4})\geqslant\frac{32b_i}{17}$, $i=1,2\cdots n$, 则边值问题(1)有 $2n$ 对称正解 u_i、$v_i\in K$ 使得 $b_i\leqslant\|u_i\|\leqslant a_i$, $b_i\leqslant\|v_i\|\leqslant a_i$, 且 $u_i=\lim\limits_{k\to\infty}T^k w_i$, $v_i=\lim\limits_{k\to\infty}T^k z_i$, 其中 $w_i=a_i$, $z_i(t)=b_iq(t)$, $i=1,2\cdots n$, $t\in[0,1]$。

证明 证明过程同定理 2.1, 故略。

参 考 文 献:

[1] Sun Yongping. Optimal existence criteria for symmetric positive solutions to a three-point boundary value

problem [J]. Nonlinear Analysis, 2007, 66(5): 1051-1063.
[2] 孙敬. 一类非线性两点边值问题对称正解的单调迭代方法[J]. 巢湖学院学报, 2009, 11(6): 18-22.
[3] Pei Minghe, Sung Kag Chang. Monotone iterative technique and symmetric positive solutions for a fourth-order boundary value problem[J]. Mathematical and Computer Modelling, 2010, 51(9-10): 1260-1267.
[4] Yao Qingliu. Monotone iterative technique positive solutions of Lidstone boundary value problems[J]. ApplMathComp, 2003, 138(1): 1-9.
[5] Avery R I, Henderson J. Three symmetric positive solutions for a second-order boundary value problem [J]. ApplMathLett, 2000, 13(3): 1-7.
[6] Sun Yongping. Existence and multiplicity of symmetric positive solutions for three-point boundary value problem[J]. J Math Anal Appl, 2007, 329(2): 998-1009.
[7] John R Graef, Kong Lingju. Necessary and sufficient conditions for the existence of symmetric positive solutions of singular boundary value problems[J]. J Math Anal Appl, 2007, 331(2): 1467-1484.
[8] Ma Huili. Symmetric positive solutions for nonlocal boundary value problems of fourth order[J]. Nonlinear Analysis, 2008, 68(3): 645-651.

Existence and Multiplicity of Symmetric Positive Solutions for Three-point Boundary Value Problems

CHEN Chun-xiang[1], XU Si-wei[2]
(1. College of Sciences, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221116, China;
2. School of Information Science & Technology, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

Abstract In order to study nonlinear two-order three-point boundary value problem, this paper investigates the existence and multiplicity results of symmetric positive solutions by using the fixed point theorem and the monotone iterative technique. Not only was the existence of 2n (n is a natural number) symmetric positive solutions for the problems obtained, but also iterative schemes for approximating the solutions was established.

Key words symmetric positive solution; monotone iterative technique; multiplicity

---

(上接第653页)

Study on Convex Combination Method of Constructing Linear Buffer Operator

LIU Wei-feng, HE Xia, XU Hong-wei, ZHANG You-lin
(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract Based on summarizing and analyzing the existing methods of constructing butter operator, according to the structure and nature of buffer operator, this paper studied the convex combination of butter operators and proposed a new method of constructing butter operator— convex combination method of constructing buffer operator. At last, some linear and nonlinear butter operators examples are given by convex combination method of constructing buffer operator.

Key words Grey system; buffer operator; convex combination; linear buffer operator; nonlinear buffer operator