

缓冲算子的凸组合构造方法研究

刘卫锋, 何霞, 许宏伟, 张又林

(郑州航空工业管理学院数理系, 郑州 450015)

摘要: 在总结分析已有构造缓冲算子方法基础上, 根据缓冲算子的结构和性质, 通过对缓冲算子凸组合的研究, 提出了构造缓冲算子的一种新方法——缓冲算子凸组合构造法。最后, 给出了利用缓冲算子凸组合构造法得到的几个线性和非线性缓冲算子实例。

关键词: 灰色系统; 缓冲算子; 凸组合; 线性缓冲算子; 非线性缓冲算子

中图分类号: O122.1; N94

文献标识码: A

引言

刘思峰教授在文献[1]中提出的缓冲算子的概念和公理系统, 开启了利用缓冲算子研究波动数据的大门。文献[2-12]在文献[1]的基础上, 构造了许多不同的强化缓冲算子和弱化缓冲算子, 并对其性质进行了深入的研究。这些研究不仅揭示了一些缓冲算子之间的内在联系, 而且也提高了灰色预测模型的预测和模拟精度, 进一步拓展了灰色预测模型的应用范围。但是, 这些构造方法本质上大致可归为两类, 一类是凭经验构造的缓冲算子, 一类是对构造出的算子施行均值法(算术平均或加权平均或几何平均等)而构造的缓冲算子。

本文在上述研究基础上, 根据缓冲算子的结构和特点, 通过对缓冲算子凸组合的研究, 提出了一种利用已有缓冲算子的凸组合构造新缓冲算子的一种更为普遍的新方法, 并称之为缓冲算子的凸组合构造方法。本文不仅对该方法给出了严格数学上的定义和证明, 并通过构造实例验证了该方法的可行性及有效性。这些研究对继续探讨缓冲算子的构造、性质以及应用具有一定理论意义和应用价值。

1 缓冲算子的凸组合

定义 1 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 是系统行为数据序列, D_1, D_2 是两个算子, 则它们的和 $D_1 + D_2$ 定

义为

$$X(D_1 + D_2) = XD_1 + XD_2$$

任意非负实数 λ 与算子 D_1 的数乘定义为 $(\lambda X)D_1 = \lambda(XD_1)$ 。

定义 2 设 D_1, D_2 是两个缓冲算子, 则它们的凸组合定义为 $\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ 其中 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$ 。

定理 1 缓冲算子 D_1, D_2 的凸组合 $\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 为缓冲算子。

证明 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 是系统行为数据序列。

显然, D_1, D_2 的凸组合 $\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ 满足缓冲算子三公理中的信息充分利用公理, 解析化、规范化公理。又

$$\begin{aligned} x(n)(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) &= x(n)(\lambda_1 d_1) + x(n)(\lambda_2 d_2) \\ &= \lambda_1(x(n)d_1) + \lambda_2(x(n)d_2) \\ &= \lambda_1 x(n) + \lambda_2 x(n) = x(n) \end{aligned}$$

即缓冲算子的凸组合满足不动点公理。

所以定理得证。

定理 2 缓冲算子 D_1, D_2, \dots, D_m 的凸组合 $\sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$

($\lambda_i \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, m$, $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$) 为缓冲算子。

证明 只需对 m 作数学归纳法即可得证。

定理 3 强化缓冲算子 D_1, D_2, \dots, D_m 的凸组合

$\sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$ ($\lambda_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$) 为强化缓冲算子。

证明 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 是系统行为数据序列。

当 X 为单调增加序列时, 有 $x(k)d_i \leq x(k), k = 1, 2, \dots, n$, 故

$$\begin{aligned} x(k)d &= x(k) \sum_{i=1}^m \lambda_i d_i = \sum_{i=1}^m x(k) (\lambda_i d_i) \\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i (x(k)d_i) \leq \sum_{i=1}^m \lambda_i x(k) = x(k) \end{aligned}$$

即 $\sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$ 是强化缓冲算子。

同理可证, 当 X 为单调衰减或振荡序列时, $\sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$ 也是强化缓冲算子。

定理 4 弱化缓冲算子 D_1, D_2, \dots, D_m 的凸组合

$\sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$ ($\lambda_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$) 为弱化缓冲算子。

证明 与定理 3类似, 这里略去。

下面考虑具有线性性质的一类特殊的缓冲算子的凸组合。

2 线性缓冲算子的凸组合

定义 3 设 $X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$ ($i = 1, 2$) 是任意两个非负序列, D 是一个算子, λ 是任意非负实数, 若满足

- 1) $(X_1 + X_2)D = X_1D + X_2D$
- 2) $(\lambda X_1)D = \lambda(X_1D)$

则称 D 是一个线性算子。

定义 4 设 $X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$ ($i = 1, 2$) 是任意两个非负序列, D 是一个缓冲算子, λ 是任意非负实数, 若满足

- 1) $(X_1 + X_2)D = X_1D + X_2D$
- 2) $(\lambda_i X_1)D = \lambda_i(X_1D)$

则称 D 是一个线性缓冲算子。

定义 5 设 $X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$ ($i = 1, 2$) 是任意两个非负序列, D 是一个缓冲算子, λ_1, λ_2 是任意非负实数, 若满足

$$3) (\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2)D = \lambda_1(X_1D) + \lambda_2(X_2D)$$

称 D 是一个线性强化缓冲算子。

容易证明, 定义 1和定义 2是等价的

设 $X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$ 是任意非负序列, λ 是任意非负实数, $i = 1, 2, \dots, m$ 。对定义 2中

的条件 3) 作数学归纳法, 容易得到 $(\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i)D = \lambda_i (\sum_{i=1}^m X_i D)$ 。

定理 5 线性缓冲算子 D_1, D_2 的凸组合 $\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 为线性缓冲算子。

证明 设 $X_i = (x_i(1), x_i(2), \dots, x_i(n))$ ($i = 1, 2$) 是任意两个非负序列。由定理 1知, $\lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ 是缓冲算子, 故只需再证其满足定义 4中的两个线性条件即可。

$$\begin{aligned} (x_1(k) + x_2(k))d &= (x_1(k) + x_2(k))(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) \\ &= (x_1(k) + x_2(k))\lambda_1 d_1 + (x_1(k) + x_2(k))\lambda_2 d_2 \\ &= \lambda_1 [(x_1(k) + x_2(k))d_1] + \lambda_2 [(x_1(k) + x_2(k))d_2] \\ &= \lambda_1 [x_1(k)d_1 + x_2(k)d_1] + \lambda_2 [x_1(k)d_2 + x_2(k)d_2] \\ &= \lambda_1 (x_1(k)d_1) + \lambda_1 (x_2(k)d_1) + \lambda_2 (x_1(k)d_2) + \lambda_2 (x_2(k)d_2) \\ &= x_1(k)(\lambda_1 d_1) + x_2(k)(\lambda_1 d_1) + x_1(k)(\lambda_2 d_2) + x_2(k)(\lambda_2 d_2) \\ &= x_1(k)(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) + x_2(k)(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) \\ &= x_1(k)d + x_2(k)d \\ (\lambda x_1(k))d &= (\lambda x_1(k))(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2) \\ &= (\lambda x_1(k))(\lambda_1 d_1) + (\lambda x_1(k))(\lambda_2 d_2) \\ &= \lambda(x_1(k)(\lambda_1 d_1)) + \lambda(x_1(k)(\lambda_2 d_2)) \\ &= \lambda[x_1(k)(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2)] = \lambda(x_1(k)d) \end{aligned}$$

所以定理得证。

定理 6 线性缓冲算子 D_1, D_2, \dots, D_m 的凸组合

$\sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$ ($\lambda_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$) 为线性缓冲算子。

证明 只需对 m 作数学归纳法即可得证。

定理 7 线性强化缓冲算子 D_1, D_2, \dots, D_m 的凸组合

$\sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$ ($\lambda_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$) 为线性强化缓冲算子。

证明 由于 $D = \sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$ 为线性缓冲算子, 故只需再证其是强化缓冲算子即可。

当 X 是单调增加序列时, 则

$$\begin{aligned} x(k)d &= x(k)(\lambda_1 d_1 + \lambda_2 d_2 + \dots + \lambda_m d_m) \\ &= \lambda_1 [x(k)d_1] + \lambda_2 [x(k)d_2] + \dots + \lambda_m [x(k)d_m] \\ &\leq \lambda_1 x(k) + \lambda_2 x(k) + \dots + \lambda_m x(k) = x(k) \end{aligned}$$

故 D 是强化缓冲算子。

同理可证, 当 X 为单调衰减或振荡序列时, $\sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$ 也是线性强化缓冲算子。

定理 8 线性弱化缓冲算子 D_1, D_2, \dots, D_m 的凸组合

$\sum_{i=1}^m \lambda_i D_i$ ($\lambda_i \in [0, 1], i = 1, 2, \dots, m, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$) 为线

性弱化缓冲算子。

定理 证明类似定理 7, 这里略去。

3 凸组合方法实例

3.1 线性缓冲算子实例

例 1 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 是系统行为数据序列, D_1, D_2 是两个线性强化缓冲算子, 其中

$$\begin{cases} x(1)d_1 = \alpha x(1), \alpha \in [0, 1] \\ x(k)d_1 = x(k-1), k = 2, 3, \dots, n-1 \\ x(n)d_1 = x(n) \\ x(1)d_2 = \alpha x(1), \alpha \in [0, 1] \\ x(k)d_2 = x(k), k = 2, 3, \dots, n-1 \end{cases}$$

则 $D = \lambda_1 D_1 + \lambda_2 D_2$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 是一个线性强化缓冲算子。

证明 由定理 7 直接得证。

特别地, 当 $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}$ 时, 得到 $D = \frac{1}{2}(D_1 +$

$D_2)$, 其中

$$\begin{cases} x(1)d = \alpha x(1), \alpha \in [0, 1] \\ x(k)d = \frac{x(k-1) + x(k)}{2}, k = 2, 3, \dots, n-1 \\ x(n)d = x(n) \end{cases}$$

则 $D = \frac{1}{2}(D_1 + D_2)$ 就是文献 [1] 中定理 6 的一个缓冲算子。

例 2 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 是系统行为数据序列, D_3, D_4 是两个线性强化缓冲算子, 其中

$$\begin{cases} x(k)d_3 = \frac{\sum_{i=1}^{k-1} x(i) + kx(k)}{2k-1}, k = 1, 2, \dots, n-1 \\ x(n)d_3 = x(n) \\ x(1)d_4 = \alpha x(1), \alpha \in [0, 1] \\ x(k)d_4 = \frac{x(k-1) + x(k)}{2}, k = 2, 3, \dots, n-1 \\ x(n)d_4 = x(n) \end{cases}$$

则 $D = \lambda_1 D_3 + \lambda_2 D_4$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 是一个线性强化缓冲算子。

证明 由定理 7 直接得证。

显然, 当 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ 时, 就是文献 [1] 定理 6 中的缓冲算子。当 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ 时, 就是文献 [1] 定理 5 中的缓冲算子。

3.2 非线性缓冲算子实例

例 3 设 $X = (x(1), x(2), \dots, x(n))$ 是系统行为数据序列, D_5, D_6 是两个强化缓冲算子, 其中

$$\begin{aligned} x(k)d_5 &= \frac{x^2(k)}{x(n)} \\ x(k)d_6 &= \frac{(n-k+1)x^2(k)}{\sum_{i=1}^n x(i)} \end{aligned}$$

则 $D = \lambda_1 D_5 + \lambda_2 D_6$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1], \lambda_1 + \lambda_2 = 1$) 是一个强化缓冲算子。

证明 由定理 3 直接得证。

显然, 当 $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1$ 时, 就是文献 [4] 定理 2 中的缓冲算子。当 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$ 时, 就是文献 [5] 定理 4 中的缓冲算子。

4 结论

通过对缓冲算子凸组合的研究, 提出了一种区别于缓冲算子传统构造方法的缓冲算子的构造新方法——缓冲算子凸组合构造法, 并通过实例验证了该方法的可行性, 该方法对于继续研究缓冲算子的构造、性质以及应用具有一定理论意义和应用价值。

参考文献

- [1] 刘思峰. 冲击扰动系统预测陷阱与缓冲算子 [J]. 华中理工大学学报, 1997, 25(1): 25-27.
- [2] 谢乃明, 刘思峰. 一种新的实用弱化缓冲算子 [J]. 中国管理科学, 2003, 11(增): 46-48.
- [3] 党耀国, 刘思峰, 刘斌, 等. 关于弱化缓冲算子的研究 [J]. 中国管理科学, 2004, 12(2): 108-111.
- [4] 党耀国, 刘斌, 关叶青. 关于强化缓冲算子的研究 [J]. 控制与决策, 2005, 20(12): 1332-1336.
- [5] 谢乃明, 刘思峰. 强化缓冲算子的性质与若干实用强化算子的构造 [J]. 统计与决策, 2006(4): 9-10.
- [6] 关叶青, 刘思峰. 关于弱化缓冲算子序列的研究 [J]. 中国管理科学, 2007, 15(4): 89-92.
- [7] 党耀国, 刘思峰, 米传民. 强化缓冲算子性质的研究 [J]. 控制与决策, 2007, 22(7): 730-734.
- [8] 关叶青, 刘思峰. 强化缓冲算子序列与 m 阶算子作用研究 [J]. 云南师范大学学报, 2007, 27(1): 32-35.
- [9] 崔杰, 党耀国. 一类新的弱化缓冲算子的构造及其应用 [J]. 控制与决策, 2008, 23(7): 741-744, 750.
- [10] 吴正朋, 刘思峰, 米传民等. 弱化缓冲算子性质研究 [J]. 控制与决策, 2010, 25(6): 958-960.
- [11] 魏勇, 孔新海. 几类强弱缓冲算子的构造方法及其内在联系 [J]. 控制与决策, 2010, 25(2): 196-202.
- [12] 崔杰, 党耀国, 刘思峰, 等. 一类新的强化缓冲算子及其数值仿真 [J]. 中国工程科学, 2010, 12(2): 108-112.

(下转第 656 页)

- problem [J]. *Nonlinear Analysis* 2007, 66 (5): 1051-1063
- [2] 孙敬. 一类非线性两点边值问题对称正解的单调迭代方法 [J]. *巢湖学院学报*, 2009, 11 (6): 18-22
- [3] Pei Minghe, Sung Kag, Chang Monotone iterative technique and symmetric positive solutions for a fourth-order boundary value problem [J]. *Mathematical and Computer Modelling* 2010, 51 (9-10): 1260-1267.
- [4] Yao Qingliu Monotone iterative technique positive solutions of Lidstone boundary value problems [J]. *AppM athComp* 2003, 138(1): 1-9
- [5] Avery R I, Henderson J Three symmetric positive solutions for a second-order boundary value problem [J]. *AppM athLet*2000, 13(3): 1-7.
- [6] Sun Yongping Existence and multiplicity of symmetric positive solutions for three-point boundary value problem [J]. *JM ath Anal Appl* 2007, 329 (2) 998-1009.
- [7] John R Graef, Kong Lingju Necessary and sufficient conditions for the existence of symmetric positive solutions of singular boundary value problems [J]. *JM ath Anal Appl* 2007, 331 (2): 1467-1484
- [8] Ma Huili Symmetric positive solutions for nonlocal boundary value problems of fourth order [J]. *Nonlinear Analysis* 2008, 68(3): 645-651.

Existence and Multiplicity of Symmetric Positive Solutions for Three-point Boundary Value Problems

CHEN Chun-xiang¹, XU Siwei²

(1. College of Sciences, China University of Mining & Technology, Xuzhou 221116, China)

2. School of Information Science & Technology, Liaoning University, Shenyang 110036, China)

Abstract In order to study nonlinear two-order three-point boundary value problem, this paper investigates the existence and multiplicity results of symmetric positive solutions by using the fixed point theorem and the monotone iterative technique. Not only was the existence of $2n$ (n is a natural number) symmetric positive solutions for the problems obtained, but also iterative schemes for approximating the solutions was established.

Keywords symmetric positive solution; monotone iterative technique; multiplicity

(上接第 653页)

Study on Convex Combination Method of Constructing Linear Buffer Operator

LIU Wei-feng, HE Xia, XU Hong-wei, ZHANG You-lin

(Department of Mathematics and Physics, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry

Management, Zhengzhou 450015, China)

Abstract Based on summarizing and analyzing the existing methods of constructing buffer operator according to the structure and nature of buffer operator, this paper studied the convex combination of buffer operators and proposed a new method of constructing buffer operator—convex combination method of constructing buffer operator. At last, some linear and nonlinear buffer operators examples are given by convex combination method of constructing buffer operator.

Keywords Grey system; buffer operator; convex combination; linear buffer operator; nonlinear buffer operator