

变换图 G^{*xy} 的独立数

顾秀松, 徐丹丹

(解放军理工大学理学院, 南京 211101)

摘要: 变换图的概念由全图推广而来。文章在中图的补图 $\overline{M}(G)$ 的定义启发下, 定义了四类变换图, 其中一个是 $\overline{M}(G)$, 并探讨了这些变换图的独立数。研究了变换图 G^{*-} 的独立数与原图最大度的关系, 以及 G^{*+} 与 G^{*-} 的独立数与原图边独立数的关系。

关键词: 变换图; 独立集; 独立数

中图分类号: O157.5

文献标识码: A

引言

本文所讨论的图均为简单图。设 $G = (V(G), E(G))$ 是图, $|V(G)| = n$ 记 G 的独立数为 $\alpha(G)$, $I_G(v)$ 为 G 中与点 v 相关联的边的集合, $\alpha'(G)$ 为 G 的最大匹配的边数。其他未说明的术语及概念见文献 [1]。变换图的概念是由全图推广而来。近年来, 不少学者陆续对包括全图在内的 8 类变换图的性质进行了研究, 如连通性, 直径, 同构问题等等 [2-7]。图 G 的中图 $M(G)$ 以及中图的补图 $\overline{M}(G)$ 也是被广泛研究的变换图 [8-10]。中图 $M(G)$ 以 $V(G) \cup E(G)$ 为其顶点集, 两个顶点 α 和 β 在 $M(G)$ 中相邻当且仅当 α 和 β 中至少有一个属于 $E(G)$, 并且它们在 G 中相邻或相关联。 $\overline{M}(G)$ 以 $V(G) \cup E(G)$ 为顶点集, 对任意的 $\alpha, \beta \in V(G) \cup E(G)$, α 和 β 在 $\overline{M}(G)$ 中邻接的条件如下: (i) $\alpha, \beta \in V(G)$ 。(ii) $\alpha, \beta \in E(G)$, 且它们在图 G 中不相邻。(iii) $\alpha \in V(G), \beta \in E(G)$, α 和 β 在图 G 中不关联。

受 $\overline{M}(G)$ 定义的启发, 可以定义下类变换图。

定义 设 $G = (V(G), E(G))$ 是简单图, $x, y \in \{+, -\}$ 。变换图 G^{*xy} 以 $V(G) \cup E(G)$ 为其顶点集, 对任意的 $\alpha, \beta \in V(G) \cup E(G)$, α 和 β 在图 G^{*xy} 中邻接的条件如下:

- (i) $\alpha, \beta \in V(G)$ 。
- (ii) $\alpha, \beta \in E(G)$, $x = +$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G

中相邻; $x = -$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中不相邻。

(iii) $\alpha \in V(G), \beta \in E(G)$, $y = +$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中关联; $y = -$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中不关联。

由上述定义, 得到 4 种变换图。其中 G^{*-} 就是 $\overline{M}(G)$ 。例如, $G \cong K_3$, 它的四类变换图如图 1。

1 G^{*xy} 的独立数

文献 [8] 证明了变换图 G^{*-} 的独立数与原图最大度的关系。本文则求出了其它 3 种图的独立数。

定理 1 [8] 对任意图 G , $\alpha(G^{*-}) = \Delta(G) + 1$

定理 2 (1) 对任意图 G , $\Delta(G) \leq \alpha(G^{*+}) \leq \Delta(G) + 2$

(2) $\alpha(G^{*+}) = \Delta(G) + 2$ 当且仅当 K_3 是 G 的真子图且 $\Delta(G) = 2$

(3) $\alpha(G^{*+}) = \Delta(G)$ 当且仅当 $\Delta(G) = n - 1$ 且 G 不同构于 $K_3, K_4, K_4 - e$ 及 G_0 , 其中 G_0 如图 2 所示。

证明 (1) 任取点 $v \in V(G)$, $I_G(v)$ 是 G^{*-} 的独立集。因为 $|I_G(v)| = d(v)$, 所以 $\alpha(G^{*-}) \geq \Delta(G)$ 。现设 S 是 G^{*-} 的独立集。由 G^{*-} 的定义知 S 至多含有 $V(G)$ 中的一个点。

情况 1 $S \cap V(G) = \{v\}$, 设 $S = \{v, e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。于是边 e_1, e_2, \dots, e_m 在 G 中两两相邻。

情况 1.1 $G[e_1, e_2, \dots, e_m]$ 是星图 $K_{1,m}$, 则 $|S| =$

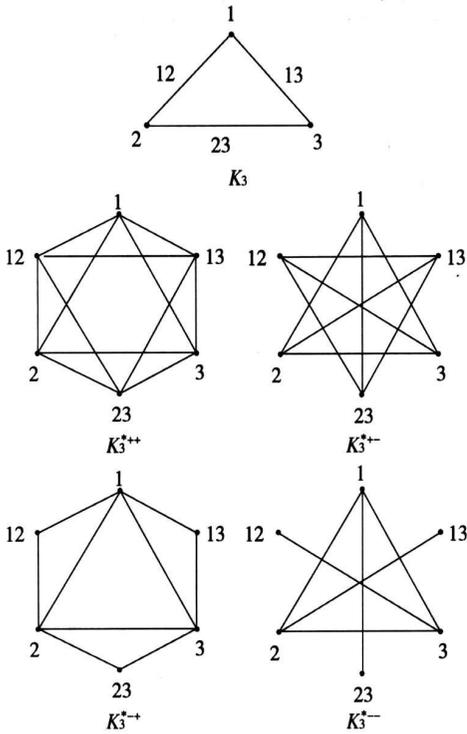


图1 K_3 的四类变换图

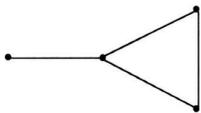


图2 G_0

$m + 1 \leq \Delta(G) + 1$

情况 1.2 $G[e_1, e_2, \dots, e_m]$ 是 K_3 , 则 $m = 3$
 $|S| = 4$ $\Delta(G) \geq 2$ 因此 $|S| \leq \Delta(G) + 2$

情况 2 $S \subseteq E(G)$ 。S 中的所有边在 G 中两两相邻, 于是, $G[S]$ 或者是星图或者是 K_3 , 无论哪种情况都有 $|S| \leq \Delta(G) + 1$

综上, $\Delta(G) \leq \alpha(G^{*++}) \leq \Delta(G) + 2$

(2) 先证必要性。设 S 是 G^{*++} 的最大独立集。

情况 1 $S \subseteq E(G)$, 由条件设 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_{\Delta(G)+2}\}$ 。同样可知边 $e_1, e_2, \dots, e_{\Delta(G)+2}$ 在 G 中两两相邻。若 $G[e_1, e_2, \dots, e_{\Delta(G)+2}]$ 是星图 $K_{1, \Delta(G)+2}$ 则与 G 的最大度是 $\Delta(G)$ 矛盾。若 $G[e_1, e_2, \dots, e_{\Delta(G)+2}]$ 是 K_3 , 则 $\Delta(G) = 1$, 矛盾。

情况 2 $S \cap V(G) = \{v\}$, 设 $S = \{v, e_1, e_2, \dots, e_{\Delta(G)+1}\}$ 。于是, 边 $e_1, e_2, \dots, e_{\Delta(G)+1}$ 在 G 中两两相邻且点 v 不是 $e_i (1 \leq i \leq \Delta(G) + 1)$ 的端点。

若 $G[e_1, e_2, \dots, e_{\Delta(G)+1}]$ 是星图 $K_{1, \Delta(G)+1}$ 则与 G 的最大度是 $\Delta(G)$ 矛盾。因此, $G[e_1, e_2, \dots, e_{\Delta(G)+1}]$ 是 K_3 , $\Delta(G) = 2$

再证充分性。由于 K_3 是 G 的真子图, 取 K_3 的 3 条

边 e_1, e_2, e_3 及 K_3 外一点 u 于是, $S = \{u, e_1, e_2, e_3\}$ 是 G^{*++} 的独立集, 因此, $\alpha(G^{*++}) \geq 4$

假设 \tilde{S} 是 G^{*++} 的最大独立集且 $|\tilde{S}| \geq 5$ 因为 \tilde{S} 至多含有 $V(G)$ 中的一个点, 所以 \tilde{S} 中至少含有 $E(G)$ 中的 4 条边 a_1, a_2, a_3, a_4 这 4 条边在 G 中两两相邻, 因此 $G[a_1, a_2, a_3, a_4]$ 为 $K_{1,4}$ 与 $\Delta(G) = 2$ 矛盾。故 $\alpha(G^{*++}) = 4 = \Delta(G) + 2$

(3) 先证必要性。假设 $\Delta(G) = r \leq n - 2$ 则 $\alpha(G^{*++}) = r$

设点 v 是 G 的最大度点。由于 $I_G(v)$ 是 G^{*++} 的独立集, 且 $|I_G(v)| = d_G(v) = r$ 故 $I_G(v)$ 是 G^{*++} 的最大独立集。

另一方面, $|V(G[I_G(v)])| = r + 1 \leq n - 1$ 故 G 中在 $G[I_G(v)]$ 外至少还存在一点 u 由定义, $\{u\} \cup I_G(v)$ 是 G^{*++} 的独立集, 与 $I_G(v)$ 是 G^{*++} 的最大独立集矛盾。因此 $\Delta(G) = n - 1$

若 G 同构于 K_3 , 则 $\alpha(G^{*++}) = 3$ 而 $\Delta(G) = 2$ 与 $\alpha(G^{*++}) = \Delta(G)$ 矛盾。

若 G 同构于 $K_4, K_4 - e$ 及 G_0 , 则 $\alpha(G^{*++}) = 4$ 而 $\Delta(G) = 3$ 矛盾。

再证充分性。由 (1) 知, $\alpha(G^{*++}) \geq \Delta(G) = n - 1$ 假设 $\alpha(G^{*++}) > \Delta(G)$, 取 G^{*++} 的一个 n 阶独立集 S S 至多含有 $V(G)$ 中的一个点。

情况 1 $S \cap V(G) = \{v\}$, 设 $S = \{v, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}\}$ 。于是边 e_1, e_2, \dots, e_{n-1} 在 G 中两两相邻, 且 v 不是 $e_i (1 \leq i \leq n - 1)$ 的端点。若 $G[e_1, e_2, \dots, e_{n-1}]$ 是星图 $K_{1, n-1}$, 则 $|V(G)| \geq n + 1$, 矛盾。若 $G[e_1, e_2, \dots, e_{n-1}]$ 是 K_3 , 则 $n = 4$ $\Delta(G) = 3$ 于是, G 同构于 $K_4, K_4 - e$ 或 G_0 与条件矛盾。

情况 2 $S \subseteq E(G)$, 设 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 。S 中的所有边在 G 中两两相邻, 若 $G[S]$ 是星图 $K_{1, n}$ 则 $|V(G)| \geq n + 1$, 矛盾。若 $G[S]$ 是 K_3 , 则 $n = 3$ $G \cong K_3$, 与条件矛盾。

综上所述, $\alpha(G^{*++}) = \Delta(G)$ 。

定理 3 (1) 对任意图 G, $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G)$ 或 $\alpha'(G) + 1$

(2) $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G) + 1$ 当且仅当 G 同构于 $K_{1, m} + mK_1, K_3 + mK_1 (m \geq 0)$ 或 G 为空图。

证明 (1) 设 M 是 G 的最大匹配。由定义知 M 是 G^{*++} 的独立集。故 $\alpha(G^{*++}) \geq \alpha'(G)$ 。现设 S 是 G^{*++} 的独立集。由 G^{*++} 的定义知 S 至多含有 $V(G)$ 中的一个点。

情况 1 $S \cap V(G) = \{v\}$, 设 $S = \{v, e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。于是 e_1, e_2, \dots, e_m 是 G 的一个匹配。因此, $|S| = m + 1 \leq \alpha'(G) + 1$ 。

情况 2 $S \subseteq E(G)$, 则 S 是 G 的一个匹配, 故 $|S| \leq \alpha'(G)$ 。

因此, $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G)$ 或 $\alpha'(G) + 1$ 。

(2) 先证必要性。设 S 是 G^{*++} 的最大独立集, 则 $|S| = \alpha'(G) + 1$ 。

情况 1 $S \cap V(G) = \{v\}$, 设 $S = \{v, e_1, e_2, \dots, e_{\alpha'(G)}\}$ 。于是 $e_1, e_2, \dots, e_{\alpha'(G)}$ 是 G 的一个匹配。且 v 和 $e_i (1 \leq i \leq \alpha'(G))$ 在 G 中相关联。因此, 或者 $\alpha'(G) = 1$, G 同构于 $K_{1,r} + mK_1$ 或 $K_3 + mK_1 (m \geq 0)$ 。或者 $\alpha'(G) = 0$, G 为空图。

情况 2 $S \subseteq E(G)$, 则 S 是 G 的一个匹配, 故 $|S| \leq \alpha'(G)$, 与 $|S| = \alpha'(G) + 1$ 矛盾。

再证充分性。若 G 为空图, 结论显然成立。

若 G 同构于 $K_{1,r} + mK_1$ 或 $K_3 + mK_1$, 则 $\alpha'(G) = 1$ 。在 G 中任取一条边 $e = uv$ 则 $S = \{u, e\}$ 是 G^{*++} 的独立集, 因此, $\alpha(G^{*++}) \geq 2$ 。

假设 \tilde{S} 是 G^{*++} 的最大独立集且 $|\tilde{S}| \geq 3$ 。因为 \tilde{S} 至多含有 $V(G)$ 中的一个点, 所以 \tilde{S} 至少含有 $E(G)$ 中的 2 条边 e_1, e_2 。于是, $\{e_1, e_2\}$ 是 G 的一个匹配, 与 $\alpha'(G) = 1$ 矛盾。故 $\alpha(G^{*++}) = 2 = \alpha'(G) + 1$ 。

定理 4 (1) 对任意图 G , $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G)$ 或 $\alpha'(G) + 1$ 。

(2) $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G)$ 当且仅当 G 有完美匹配。

证明 (1) 设 M 是 G 的最大匹配。由定义知 M 是 G^{*++} 的独立集。故 $\alpha(G^{*++}) \geq \alpha'(G)$ 。现设 S 是 G^{*++} 的独立集。由 G^{*++} 的定义知 S 至多含有 $V(G)$ 中的一个点。

情况 1 $S \cap V(G) = \{v\}$, 设 $S = \{v, e_1, e_2, \dots, e_m\}$ 。于是 e_1, e_2, \dots, e_m 是 G 的一个匹配。因此, $|S| = m + 1 \leq \alpha'(G) + 1$ 。

情况 2 $S \subseteq E(G)$, 则 S 是 G 的一个匹配, 故 $|S| \leq \alpha'(G)$ 。

因此, $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G)$ 或 $\alpha'(G) + 1$ 。

(2) 先证必要性。设 M 是 G 的最大匹配。假设 M 不是完美匹配, 则 G 中存在点 v 是 M 非饱和点。于是, $\{v\} \cup M$ 是 G^{*++} 的最大独立集, $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G) + 1$ 与 $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G)$ 矛盾。故 M 是 G 的完美匹配。

再证充分性。假设 $\alpha(G^{*++}) \neq \alpha'(G)$, 则由 (1), $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G) + 1$ 。设 S 是 G^{*++} 的最大独立集。

情况 1 $S \cap V(G) = \{v\}$, 设 $S = \{v, e_1, e_2, \dots, e_{\alpha'(G)}\}$ 。于是 $\tilde{M} = \{e_1, e_2, \dots, e_{\alpha'(G)}\}$ 是 G 的最大匹配, 且 v 是 \tilde{M} 非饱和点。由于 G 有完美匹配, 故 \tilde{M} 也是完美匹配, 与 v 是 \tilde{M} 非饱和点矛盾。

情况 2 $S \subseteq E(G)$, 则 S 是 G 的一个匹配, 故 $|S| \leq \alpha'(G)$, 与 $|S| = \alpha'(G) + 1$ 矛盾。

因此, $\alpha(G^{*++}) = \alpha'(G)$ 。

2 待研究的问题

本文仅仅讨论了变换图 G^{*xy} 的独立数。类似的, 我们可以定义其它一些图。设 $G = (V(G), E(G))$ 是简单图, $x, y \in \{+, -\}$ 。变换图 G^{*xy} 以 $V(G) \cup E(G)$ 为其顶点集, 对任意的 $\alpha, \beta \in V(G) \cup E(G)$, α 和 β 在图 G^{*xy} 中邻接的条件如下:

(i) $\alpha, \beta \in E(G)$, $x = +$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中相邻; $x = -$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中不相邻。

(ii) $\alpha \in V(G)$, $\beta \in E(G)$, $y = +$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中关联; $y = -$ 时当且仅当 α 和 β 在图 G 中不关联。

于是, 我们也可以得到四类变换图。其中, G^{*++} 就是中图 $M(G)$, G^{*--} 是它的补图。同样, G^{*+-} , G^{*-+} , G^{*--} 分别是 G^{*++} , G^{*+-} , G^{*-+} 的补图。对于变换图的性质, 还可考虑图的连通度, 边连通度, 色数, 哈密尔顿性等。

参考文献

[1] Bondy JA, Murty U S R. Graph Theory with Applications[M]. New York: American Elsevier; London: Macmillan, 1976

[2] Wu B, Meng J X. Basic properties of total transformation graph[J]. J Math Study, 2001, 34(2): 109-116

[3] Wu B, Zhang L, Zhang Z. The transformation graph G^{*xy} when $xyz = -++$ [J]. Discrete Math, 2005, 296: 263-270

[4] Zhang Z, Huang X H. Connectivity of Transformation Graphs G^{*++} [J]. Graph Theory Notes of New York, 2002, 43: 35-38

[5] Chen J Y, Meng J X. Super edge-connectivity of transformation graph G^{*++} [J]. Journal of Shanxi Normal University Natural Science Edition, 2006, 34(1): 123-124

[6] Chen J Y, Meng J X. Super Edge-connectivity of Transformation Graphs G^{*++} [J]. Journal of Xinjiang University (Natural Science Edition), 2006, 23(1): 1-4

[7] Lin Q, Shu J L. Regularity and Spectral Radius of Transformation Graphs [J]. Operations Research Transactions, 2007, 11(1): 102-110

- [8] Xinhu iA n Baoyindureng W u Han iltonicity of complements of middle graphs [J]. Discrete Math , 2007, 307: 1178-1184.
- [9] Bauer D, Tidell R. The connectivities of the middle graph[J]. J Combin Inform. System Sci, 1982, 7 (1): 54-55
- [10] Han ada T, Yoshimura I Traversability and connectivity of the middle graph of a graph[J]. Discrete Math , 1976, 14: 247-255

Independence Number of Transformation Graphs G^{*xy}

GUXiu-song, XU Dan-dan

(Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)

Abstract Transformation graphs come from the total graph. In this paper, we introduce four kinds of transformation graphs, one of which is the complement of middle graph $M(G)$ and investigate the independence number of these transformation graphs. We study that the independence number of G^{*-+} is associated with maximum degree of G , and the independence number of G^{*++} and G^{*-} are associated with edge independence number of G .

Key words transformation graphs; independent set; independence number

(上接第 638页)

Program of Motor Vehicle Inspection Maintenance

WANG Guang-qing

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract This paper creates a stochastic optimization model of motor vehicle inspection maintenance, which will minimize the malfunctions of motor vehicle and the cost of maintenance. The number of inspection is regarded to be the continuous function of time in this model. optimization problem will be boiled down to functional extremum then be resolved at last.

Key words inspection cycle; optimization model; continuous function; anticipant; functional extremum