

汽车检查维护费用的最优模型

王光清

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

摘要: 文章建立了一个汽车检查维护随机性优化模型, 让汽车将故障降到最低, 也要汽车驾驶者承担维护费用最低。模型中将检查次数视为时刻 t 的连续函数, 把优化问题归结为泛函极值问题加以解决。

关键词: 检查周期; 优化模型; 连续函数; 期望值; 泛函极值; 指数分布

中图分类号: O177

文献标识码: A

1 问题的提出

现在汽车拥有量大增, 交通事故也时有发生, 其中有很多都是因为机械事故引发的。而这种现象是我们完全可以预防控制的, 只要我们经常检查汽车设备的完好状况, 就可及时发现和排除故障, 保证安全行驶。接连两次检查的时间间隔称为检查周期, 本文的汽车检查维护方案即指确定检查周期。汽车设备出故障是随机的, 一旦出现故障, 假定设备将带故障运行到下一次检查时才被发现, 这会造成相当大的损失。显然, 检查周期越长, 损失越大, 另一方面, 检查需付费用, 周期越短, 检查费越多。于是需要建立一个随机性优化模型^[1], 根据对故障的随机规律、损失费、检查费等作的假设, 确定检查周期使总的平均费用最小。

2 问题分析

一般来说, 检查周期不一定是常数, 而应该根据故障出现时刻的概率分布来确定, 在故障概率要用连续型分布函数来描述, 相应地, 我们把检查周期表示为时刻 t 的函数, 记作 $s(t)$, 并且假设它连续。这样, 单位时间内的检查次数也是 t 的函数, 记作 $n(t)$, 显然 $n(t) = 1/s(t)$ 。通常, 与设备正常运行的时间相比, 检查周期很短, 而 $n(t)$ 很大, 可以视 $n(t)$ 为连续函数。

3 模型假设

(a) 设备故障时刻的概率分布函数为 $F(t)$, 概率密

度为 $f(t)$ ^[2], 设备使用期限是 T , 于是 $F(T) = 1$ 。

(b) 设备带故障运行到检查时为止的损失与这段运行时间成正比, 比例系数 c_1 即为单位时间损失费。

(c) 因为单位时间检查次数 $n(t)$ 很大, 所以在相邻两次检查之间出现故障的时刻可认为是均匀分布的, 而带故障运行的时间则取这个分布的均值。

(d) 每次检查费为 c_2 , 到时刻 t 为止的检查次数可表示为 $\int_0^t n(\tau) d\tau$ 。

4 建模与求解

设备运行一直到某次检查发现故障或到使用期限 T 为止, 优化模型的目标函数取做这样一次运行的总费用(损失费与检查费)的期望值。

若设备在 $[t, t + \Delta t]$ 内发生故障, 由假设 3 故障时刻在周期 $s(t)$ 内成均匀分布, 均匀分布的均值等于分布区间的一半, 所以带故障运行时间问为 $s(t)/2 = 1/2n(t)$ 。在由假设 2 损失费为 $c_1/2n(t)$ 。根据假设 4 检查费为

$$c_2 \int_0^t n(\tau) d\tau. \text{ 于是总费用为 } \frac{c_1}{2n(t)} + c_2 \int_0^t n(\tau) d\tau.$$

由假设 1, 设备在一次运行中总费用的期望值^[3]为

$$c(n(t)) = \int_0^T \left[\frac{c_1}{2n(t)} + c_2 \int_0^t n(\tau) d\tau \right] f(t) dt \quad (1)$$

$c(n(t))$ 是 $n(t)$ 的泛函^[4], 为了把求 $n(t)$ 使 $c(n(t))$ 达到最小的泛函极值问题^[5]

$$\text{令 } x(t) = \int_0^t (\tau) d\tau \quad (2)$$

$x(t)$ 是到 t 为止的检查次数, (1) 式化为

$$c(x(t)) = \int_0^T \frac{c_1}{2x(t)} + c_2 x(t) f(t) dt \quad (3)$$

$x(t)$ 的端点条件显然是

$$x(0) = 0 \quad x(T) \text{ 自由} \quad (4)$$

(3) 式、(4) 式是一端固定、一端自由的泛函极值问题。

利用欧拉方程^[6]可得 $x(t)$ 应满足

$$c_2 f(t) + \frac{c_1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{f(t)}{x^2(t)} \right) = 0 \quad (5)$$

积分(5)式并注意到 $\frac{dF}{dt} = f(t)$, 有

$$c_2 F(t) + \frac{c_1}{2} \frac{f(t)}{x^2(t)} = k \quad (6)$$

令积分常数 $k = c_2 a$ (a 是另一常数), 则

$$\frac{f(t)}{x^2(t)} = \frac{2c_2}{c_1} [a - F(t)] \quad (7)$$

用自由端点的横截条件确定常数 a

$$\frac{f(t)}{x^2(t)} \Big|_{t=T} = 0 \quad (8)$$

将(8)式代入(7)式并由假设 1 的 $F(T) = 1$, 立即有 $a = 1$ 。于是

$$\frac{1}{x^2(t)} = \frac{2c_2}{c_1} \frac{1 - F(t)}{f(t)} \quad (9)$$

根据(2)式和 $x(0) = 0$ 得到:

$$n(t) = \sqrt{\frac{c_1}{2c_2} \frac{f(t)}{1 - F(t)}} \quad (10)$$

这就是使总的期望费用达到最小的检查次数函数, 若将设备的正常使用时间视作寿命, $F(t)$ 为寿命的分布函数, 引用可靠度^[8]和失效率的概念和记号, (10) 式又可表为:

$$n(t) = \sqrt{\frac{c_1 r(t)}{2c_2}} \quad (11)$$

其中 $r(t)$ 是失效率。

我们终于得到(11)式这样一个简单的结果, 它表明最优的检查次数 $n(t)$ 完全由单位时间损失费 c_1 每次检查费 c_2 和设备的失效率 $r(t)$ 决定^[9]。一般的, $r(t)$ 随时间 t 变化, 那么当 $r(t)$ 较大的时候, 容易出现故障, 检查次数 $n(t)$ 就应该大一些, 这正是(11)式所给出的。

特别的, 如果设备寿命服从参数 λ 的指数分布, 失效率为常数 $r(t) = \lambda$ 且平均寿命 $u = 1/\lambda$, 则(11)式给出更加简单的结果:

$$n = \sqrt{\frac{c_1}{2c_2 u}} \quad (12)$$

单位时间检查次数与 t 无关, 或者将检查周期 s 表示为

$$s = \sqrt{\frac{2c_2 u}{c_1}} \quad (13)$$

s 是常数, 即最优检查方案是等周期的。(13)式还表明, 设备的平均寿命 u 越长, 检查费与损失费之比 c_2/c_1 越大, 检查周期应越长^[10]。这是符合常识的, 而(13)式给出了他们之间的数量关系, 容易知道只有指数分布才能得到这种最简单的最优检查方案。

5 模型评注

本来检查次数是对于时间区间而言的, 并且只取正整数值, 模型中将它视为时刻 t 的连续函数, 从而可以利用数学分析的工具, 把优化问题归结为泛函极值问题, 当然其中离不开一些合理的简化, 如假设 3。

这个模型的目标函数是运行到发现故障为止的总期望费用, 而没有采用单位时间的平均费。事实上如果忽略从设备故障到发现故障这段较小的时间, 那么用这两种目标函数来求解最优的 $n(t)$ 是等价的, 因为在后者中运行时间的期望与 $n(t)$ 无关。

参考文献

- [1] 蔡宜三. 最优化与最优控制 [M]. 北京: 清华大学出版社, 1982
- [2] 徐全智, 朱宏. 概率论与数理统计 [M]. 成都: 电子科技大学出版社, 1999
- [3] 姜启源. 数学模型 [M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 1993
- [4] 郑维行, 王声望. 实变函数与泛函分析概要 [M]. 2版. 北京: 高等教育出版社, 1999
- [5] 徐全智, 杨晋浩. 数学建模 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003
- [6] ba ke bai lu com /view /496693 .htm 2010-7-23
- [7] [美] W. F. Lucas 编. 成礼智, 译. 离散与系统模型: 应用数学模型丛书第 3 卷 [M]. 北京: 国防科技大学出版社, 1996
- [8] 白其岭. 数学建模案例分析 [M]. 北京: 海洋出版社, 2000
- [9] 姜启源. 2001 年全国大学生数学建模竞赛 [J]. 工程数学学报: 数学建模专辑, 2002, 19(2): 1-5
- [10] 叶林, 邓筱红. 工厂安全事故预测中的数学模型 [J]. 数学的实践与认识, 2007, 31(3): 20-25.

(下转第 642 页)

- [8] Xinhu iA n Baoyindureng W u H an iltonicity of complements of middle graphs [J]. Discrete Math , 2007, 307: 1178-1184.
- [9] Bauer D, Tidell R. The connectivities of the middle graph[J]. J Combin Inform. System Sci, 1982, 7 (1): 54-55
- [10] H an ada T, Yoshimura I Traversability and connectivity of the middle graph of a graph[J]. Discrete Math , 1976, 14: 247-255

Independence Number of Transformation Graphs G^{*xy}

GUXiu-song, XU Dan-dan

(Institute of Science, PLA University of Science and Technology, Nanjing 211101, China)

Abstract Transformation graphs come from the total graph. In this paper, we introduce four kinds of transformation graphs, one of which is the complement of middle graph $M(G)$ and investigate the independence number of these transformation graphs. We study that the independence number of G^{*-+} is associated with maximum degree of G , and the independence number of G^{*++} and G^{*+-} are associated with edge independence number of G .

Key words transformation graphs; independent set; independence number

(上接第 638页)

Program of Motor Vehicle Inspection Maintenance

WANG Guang-qing

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract This paper creates a stochastic optimization model of motor vehicle inspection maintenance, which will minimize the malfunctions of motor vehicle and the cost of maintenance. The number of inspection is regarded to be the continuous function of time in this model. optimization problem will be boiled down to functional extremum then be resolved at last.

Key words inspection cycle; optimization model; continuous function; anticipant; functional extremum