

Coons 曲面生成算法研究与实现

袁 超

(四川理工学院计算机学院, 四川 自贡 643000)

摘 要: 文章深入分析了 Coons 曲面的基本特性及生成原理, 针对工程实际中常采用的双三次曲面, 提出了 1 种在 OpenGL 中, 运用 C++ 面向对象设计方法, 采用优化的数据结构和简洁的生成算法进行实现的技术途径, 指出了它对于自由曲面三维造型所存在的实际意义。

关键词: Coons; 计算机辅助几何设计; 自由曲面; 数据结构; 算法

中图分类号: TP391.41

文献标识码: A

引 言

在计算机辅助几何设计中, 对于一些具有自由曲面外形的三维形体, 由于不能采用规则的几何形体进行造型设计, 所以不能采用常规的方法进行处理。如果在此基础上, 还要进一步满足形体表面具有光滑和光顺的要求, 则会存在着更大的困难^[1]。因此, 如何采用数学方法来描述曲面的外形, 针对自由曲面的应用分析, 研究一种合理的数据结构和算法成为解决问题的关键。为此, 本文就 Coons 曲面在这方面的应用进行相关的分析和探讨。

1 曲面的双参数函数表示

在计算机辅助几何设计中, 自由曲面可以用若干小的曲面片单元构成, 对于小的曲面片可用双参数函数法进行表示。为此, 采用两个参数 u 和 w 作为自变量, 曲面片上点的三个坐标分量可以表示为:

$$\begin{cases} x = x(u, w) \\ y = y(u, w) \\ z = z(u, w) \end{cases} \quad \text{其中 } 0 \leq u, w \leq 1$$

用矢量形式表达为:

$$r = r(u, w) = [x(u, w) \quad y(u, w) \quad z(u, w)]$$

图 1 中对于参数平面 uow 上任意一点 (u_0, w_0) , 曲面片上总有一点 $r(u_0, w_0)$ 与之对应, 参数平面上正方形域的四条边 $w=0, u=0, w=1, u=1$, 则分别对应着曲面

片四条边界线 $r(u, 0), r(u, 1), r(0, w), r(1, w)$, 而正方形域四个顶点则对应于曲面上的四个角点 $r(0, 0), r(0, 1), r(1, 0), r(1, 1)$ 。

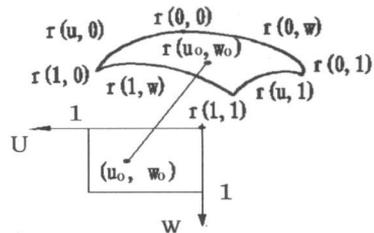


图 1 曲面片的双参数函数表示

分别对 u 和 w 求偏导矢:

$$r_u(u, w) = \frac{\partial r(u, w)}{\partial u}$$

$$r_w(u, w) = \frac{\partial r(u, w)}{\partial w}$$

可得边界曲线上的切矢为: $r_u(u, 0), r_u(u, 1), r_w(0, w), r_w(1, w)$ 。并由此可得四个角点的 u 向切矢和 w 向切矢为:

$$r_u(0, 0), r_u(1, 0), r_u(0, 1), r_u(1, 1)$$

$$r_w(0, 0), r_w(0, 1), r_w(1, 0), r_w(1, 1)$$

此外, 可以求边界曲线的跨界斜率(即法向偏导矢)

为:

$$r_w(u, 0), r_w(u, 1), r_u(0, w), r_u(1, w)$$

混合偏导矢 $r_{uw}(u, w) = \frac{\partial^2 r(u, w)}{\partial u \partial w}$ 称为扭矢, 则反

映了 r_u 对 w 的变化率或 r_w 对 u 的变化率。可以求得四个角点的扭矢分别为: $r_{uw}(0, 0)$, $r_{uw}(0, 1)$, $r_{uw}(1, 0)$, $r_{uw}(1, 1)$ 。

2 Coons曲面的构造方法

Coons曲面构造的基本思路是:把所要描述的曲面看作是由若干块曲面片光滑拼接而成的,每块曲面片用四条边界曲线来定义,在相邻曲面片之间的边界上,可根据具体要求实现位置、斜率和曲率甚至更高阶的偏导矢连续,使整个曲面达到光滑的要求。

2.1 混合函数的性质

在 Coons曲面的生成和表示中,三次混合函数 $F_0(u)$, $F_1(u)$, $G_0(u)$, $G_1(u)$ 的功能是把给定的两对边界及其跨界斜率“混合”起来生成一块曲面片。

三次混合函数的具体形式为:

$$\begin{cases} F_0(u) = 1 - 3u^2 + 2u^3 \\ F_1(u) = 3u^2 - 2u^3 \\ G_0(u) = u - 2u^2 + u^3 \\ G_1(u) = -u^2 + u^3 \end{cases}$$

这些混合函数具有如下性质:

$$\begin{aligned} F_0(0) &= 1, F_0(1) = 0, F'_0(0) = 0, F'_0(1) = 0 \\ F_1(0) &= 0, F_1(1) = 1, F'_1(0) = 0, F'_1(1) = 0 \\ G_0(0) &= 0, G_0(1) = 0, G'_0(0) = 1, G'_0(1) = 0 \\ G_1(0) &= 0, G_1(1) = 0, G'_1(0) = 0, G'_1(1) = 1 \end{aligned}$$

反之,具有这种性质的四个三次多项式函数 F_0 、 F_1 、 G_0 、 G_1 是唯一的^[2]。

由于三次函数被它所在两个端点处的函数值和一阶导数值唯一决定,这四个混合函数具有如下功能:通过四条给定的边界曲线,可以经过 F_0 、 F_1 、 G_0 和 G_1 的作用后,混合生成一张曲面。

2.2 Coons曲面的构造

构造 Coons曲面时,由于对曲面性能的要求不同,对给定的曲面片边界信息量的要求也不同,由此可以构造出不同类型的 Coons曲面,如第一类 Coons曲面,第二类 Coons曲面,第三类 Coons曲面,双三次曲面等^[3]。

2.2.1 第一类 Coons曲面

构造第一类 Coons曲面仅需要给定曲面片的四条边界和曲面片的四个角点位置信息。

设给定的四条边界曲线为:

$$r(u, 0), r(u, 1), r(0, w), r(1, w)$$

其中, $0 \leq u \leq 1, w \leq 1$

四个角点为: $r(0, 0)$, $r(0, 1)$, $r(1, 0)$, $r(1, 1)$

$$r(u, w) =$$

$$[F_0(u) \quad F_1(u)] \begin{bmatrix} r(0, w) \\ r(1, w) \end{bmatrix} +$$

$$[r(u, 0) \quad r(u, 1)] \begin{bmatrix} F_0(w) \\ F_1(w) \end{bmatrix} -$$

$$[F_0(u) \quad F_1(u)] \begin{bmatrix} r(0, 0) & r(0, 1) \\ r(1, 0) & r(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0(w) \\ F_1(w) \end{bmatrix}$$

以三阶方阵表示曲面片的边界信息矩阵,则给定边界的第一类 Coons曲面为:

$$r(u, w) = - [-1 F_0(u) \quad F_1(u)]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & r(u, 0) & r(u, 1) \\ r(0, w) & r(0, 0) & r(0, 1) \\ r(1, w) & r(1, 0) & r(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ F_0(w) \\ F_1(w) \end{bmatrix}$$

第一类 Coons曲面片只能拟合到曲面的边界,用它拼接曲面可以保证整张曲面位置矢连续,但不能保证各曲面片公共边界的光滑性,即在公共边界上可能不存在切平面。

2.2.2 第二类 Coons曲面

构造第二类 Coons曲面除了要给定曲面片的四条边界和曲面片的四个角点位置信息外,还要给定四条边界曲线的跨界斜率。

设给定四条边界曲线的跨界斜率为:

$$r_w(u, 0), r_w(u, 1), r_u(0, w), r_u(1, w)$$

利用三次混合函数可以构造出具有给定边界及跨界斜率的 Coons曲面片,即第二类 Coons曲面,具体表达如下:

$$r(u, w) = - [-1 F_0(u) \quad F_1(u) \quad G_0(u) \quad G_1(u)]$$

$$\begin{bmatrix} 0 & r(u, 0) & r(u, 1) & r_w(u, 0) & r_w(u, 1) \\ r(0, w) & r(0, 0) & r(0, 1) & r_w(0, 0) & r_w(0, 1) \\ r(1, w) & r(1, 0) & r(1, 1) & r_w(1, 0) & r_w(1, 1) \\ r_u(0, w) & r_u(0, 0) & r_u(0, 1) & r_{uw}(0, 0) & r_{uw}(0, 1) \\ r_u(1, w) & r_u(1, 0) & r_u(1, 1) & r_{uw}(1, 0) & r_{uw}(1, 1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ F_0(w) \\ F_1(w) \\ G_0(w) \\ G_1(w) \end{bmatrix}$$

其中,五阶方阵的第一行和第一列包含着给定的两对边界与相应的跨界斜率;右下角的四阶方阵为四个角点的信息方阵,包括角点位置矢、角点的 u 向切矢和 w 向切矢及扭矢。

第二类 Coons曲面不但能拟合到边界曲线,还能保证跨界斜率连续,使各曲面片在公共边界处具有公共切平面,但不能保证跨界斜率连续^[4]。

对于更高阶偏导矢连续的曲面,由于实际应用中无法提供过多的边界信息,所以很少用到,故对第三类 Coons曲面不再做分析探讨。

2.2.3 双三次曲面

在工程实际中的自由曲面,常采用双三次曲面来进行定义,它是一种简易和实用的表达方式。双三次曲面直接利用角点信息和混合函数来定义 Coons 曲面,它是第二类 Coons 曲面在特定情况下的一种定义形式^[5]。

设给定四个角点的位置矢、w 向切矢、u 向切矢和角点扭矢,则四个角点的信息矩阵表示为:

$$c = \begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & r_w(0,0) & r_w(0,1) \\ r(1,0) & r(1,1) & r_w(1,0) & r_w(1,1) \\ r_u(0,w) & r_u(0,0) & r_{uw}(0,0) & r_{uw}(0,1) \\ r_u(1,w) & r_u(1,0) & r_{uw}(1,0) & r_{uw}(1,1) \end{bmatrix}$$

直接利用角点信息和混合函数构造双三次曲面片:

$$r(u, w) = [F_0(u) \quad F_1(u) \quad G_0(u) \quad G_1(u)] C [F_0(w) \quad F_1(w) \quad G_0(w) \quad G_1(w)]^T$$

其中 $(0 \leq u, w \leq 1)$,在此,进一步设:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U = [1 \quad u \quad u^2 \quad u^3]$$

$$W = [1 \quad w \quad w^2 \quad w^3]$$

则双三次曲面片的表达式为:

$$r(u, w) = UCM^TW^T$$

3 Coons 曲面算法的实现

下面将根据双三次曲面片为研究对象,分析讨论 Coons 曲面的算法实现。

3.1 双三次曲面的参数方程分量表达式

由于双三次曲面片的表达式 $r(u, w) = UCM^TW^T$ 是矢量形式,在具体计算时应以参数方程分量形式进行表示^[6]。为此,角点信息矩阵 C 以矢量为元素的四阶方阵,应取各矢量元素的三个坐标分量,组成三个以标量为元素的四阶方阵: C_x 、 C_y 和 C_z 则双三次曲面的参数方程分量表达式为:

$$\begin{cases} x(u, w) = UMC_xM^TW^T \\ y(u, w) = UMC_yM^TW^T \\ z(u, w) = UMC_zM^TW^T \end{cases}$$

其中 $0 \leq u, w \leq 1$,此即双三次曲面算法设计的数学模型,即程序设计的逻辑处理依据。

3.2 双三次曲面算法的实现

3.2.1 原始数据及条件

为了实现双三次曲面的算法,为简单方便考虑给定曲面片的双参数函数为:

$$\begin{cases} x = x(u, w) = u + 0 \cdot w \\ y = y(u, w) = 0 \cdot u + w \\ z = z(u, w) = 0 \cdot u + 0 \cdot w \end{cases}$$

即:

$$\begin{cases} x = u \\ y = w & -1 \leq u, w \leq 1 \\ z = 0 \end{cases}$$

它的几何表示为一个水平平面。

为了研究 Coons 曲面的特性,把这个水平平面划分为四块,在坐标系上给出九个角点,这九个角点将作为生成 Coons 曲面的控制点,由它们通过混合函数生成多个 Coons 曲面上的点,最终构成所需的自由曲面。对于这九个控制角点,根据它们被给出的自然先后顺序依次进行编号,如图 2 所示。

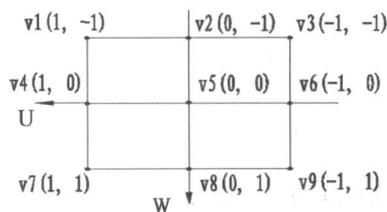


图 2 由九个角点拼接成的四块控制面片

3.2.2 程序模块设计

九个角点的原始数据信息中除位置矢之外,还包括 w 向切矢、u 向切矢、扭矢(表 1),数据采用数组 $c[9][2][2][3]$,其中,顶点编号范围为 1-9,第 2 维和第 3 维编码为: 1, 1: 位置矢, 1, 2 w 向切矢, 2, 1: u 向切矢, 2, 2 扭矢,此外,坐标分量的编码为: 1: x 分量, 2 y 分量, 3 z 分量。

表 1 角点原始数据信息表

角点	位置矢			W 向切矢			U 向切矢			扭矢		
	ix	iy	iz	iwX	iwY	iwZ	iux	iuy	iuz	iux	iuy	iuz
1	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
8	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

每个控制面片由四个角点构成,由控制面片号访问它的组成角点,设为从上到下从左到右依次按 1-4 的

顺序进行,为此采用数组 $L[4][4]$ 存储各个控制面片上组成的角点。由此,可进行根据控制面片号访问其组成角点,进而访问该角点的位置矢, w 向切矢, u 向切矢, 扭矢等信息。如图 3 所示。

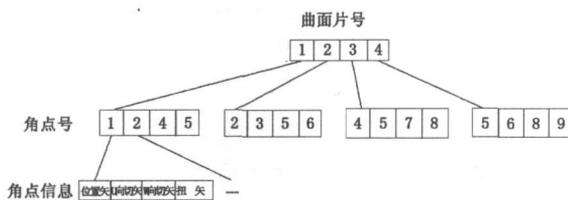


图 3 各个控制面片上组成角点的访问

每个控制面片的角点坐标分量矩阵为四阶方阵,采用二维数组 $cx[4][4]$, $cy[4][4]$, $cz[4][4]$ 进行存储,由原始数据 $c[9][2][2][3]$ 可计算 $cx[4][4]$, $cy[4][4]$, $cz[4][4]$, 其中,控制面片编号, c , cx , cy , cz 数组间的关系如图 4 所示。

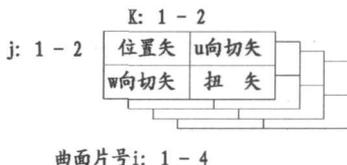


图 4 根据控制面片号计算角点坐标分量矩阵

算法的最终目的是利用 9 个控制角点 v_1-v_9 的角点信息和混合函数来生成 Coons 曲面上的点。在算法中,一个控制角点周围将产生 9 个 Coons 曲面上的点,为此,用数组 $p[81][4]$ 表示点的齐次坐标矩阵,具体绘图时,还需进行轴测投影变换,最终的绘图坐标取自变换后的 $pp[81][4]$ 齐次坐标矩阵。

计算过程主要为:输入 $c[9][2][2][3]$; 计算 $cx[4][4]$, $cy[4][4]$, $cz[4][4]$; 计算 U , M 矩阵及其转置矩阵 W , MT ; 计算 R_x , R_y , R_z 矩阵; 计算 Coons 曲面点坐标 $p[81][4]$; 计算轴测投影变换坐标。最后完成绘图。

程序设计模块如图 5 所示。其中等分点参数 u 的取值为: $0, 1/8, 2/8, \dots, 1$ 。

3.2.3 程序实现

程序实现采用 OpenGL Utility Toolkit C++ 面向对象程序设计方法。

定义 `Matrix` 类,完成任意行列数矩阵的构造,任意行列数二维数组向矩阵的转换,矩阵转置,矩阵乘法,矩阵拷贝赋值, U 矩阵的构造,矩阵显示等。

定义函数 `void main (int argc, char* * argv)`,完成原始数据提供,图形初始化处理,计算类型选择,函数调

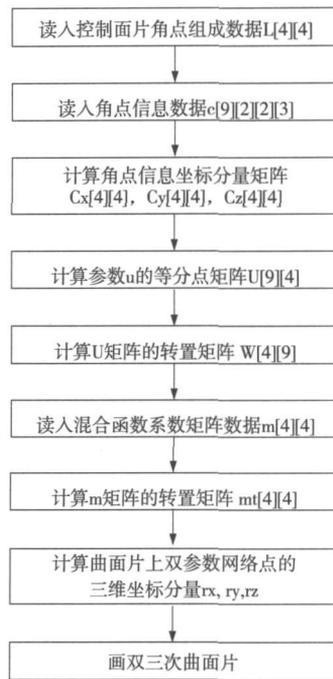


图 5 双三次曲面程序模块设计

用等功能。

定义 `void coons()` 和 `void coonsMatrix()` 函数,完成从 $c[9][2][2][3]$ 数组到九行九列矩阵 rx, ry, rz 的计算。

`void draw coons(Matrix& rx, Matrix& ry, Matrix& rz)`,完成 Coons 曲面上点的齐次坐标 $p[81][4]$ 的计算,完成轴测投影变换坐标矩阵 $pp[81][4]$ 的计算,绘图。

3.3 双三次曲面形状的影响因素

绘图结果如图 6 所示:

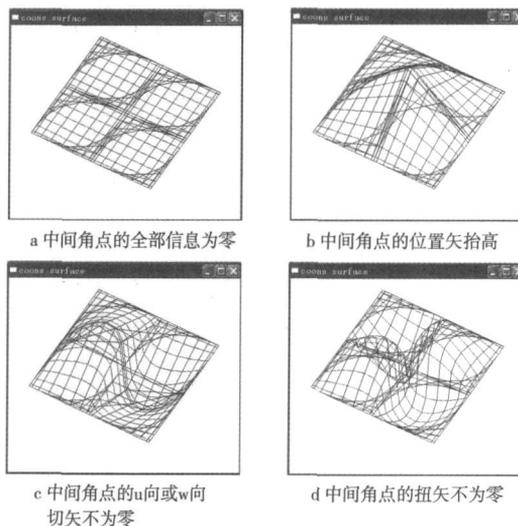


图 6 双三次曲面程序绘图结果

双三次曲面片的形状完全由四个控制角点的信息矩阵确定。其中,角点位置矢、角点 u 向切矢和 w 向切

矢完全决定了四条边界的位置和形状,而角点扭矢则与边界形状无关,它只是起到了控制曲面片内部凹凸的作用。

4 结束语

在计算机辅助几何设计中,双三次曲面作为第二类 Coons曲面的特殊形式,由于具有简单实用的特点,在自由曲面的三维造型辅助设计中具有重要的作用,它不但能拟合到边界曲线满足位置和形状结构上的要求,还能保证跨界斜率连续,使各曲面片在公共边界处具有公共切平面,具有连续并且光滑的特点。通过角点扭矢的调节,可以起到控制曲面片内部凹凸的作用,取得良好的造型效果。

参考文献:

- [1] 莫蓉,常智勇.计算机辅助几何造型技术[M].北京:科学出版社,2009.
- [2] 孙家广,许同文.计算机图形学[M].北京:清华大学出版社,1986.
- [3] 李春雨,邱道尹.计算机图形学理论与实践[M].北京:北京航空航天大学出版社,2005.
- [4] 江涛.计算机绘图与辅助设计[M].上海:复旦大学出版社,1994.
- [5] 金廷赞.计算机图形学[M].杭州:浙江大学出版社,2000.
- [6] 李艳艳.M矩阵与其逆矩阵的 Hadamard积最小特征值下界的研究[J].四川理工学院学报:自然科学版,2009,22(3):15-17.

Research and Implementation on the Coons Surface Generation Algorithm

YUAN Chao

(School of Computer Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract This paper analyses the basic characteristics of the Coons surface and its generative principle. According that the bicubic surface is practical used in engineering application, by using of C++ object-oriented design method and the optimization of data structure and concise generation algorithm, the paper presents an important technology under OpenGL utility and points out that it is of practical significance for free surface of 3D modeling.

Key words Coons, computer aided geometric design, freeform surface, data structure, algorithm