

关于奇素数方幂中的孤立数

管训贵

(泰州师范高等专科学校数理系, 江苏 泰州 225300)

摘要: 设 n 是正整数, 用 $\sigma(n)$ 表示 n 的所有正因数的和. 对于给定的正整数 a , 如果不存在正整数 b 适合 $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$ 则称 a 是孤立数. 文章运用初等数论的方法证明了 p^r 都是孤立数. 这里 p 为奇素数, 满足 $p > 2r^{1+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, ε 是任意实数, r 是正整数, 满足 $r > \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$.

关键词: 亲和数; 孤立数; 奇素数; 正整数; 方幂

中图分类号: O156

文献标识码: A

1 引言及主要结论

对于正整数 a , 设 $\sigma(a)$ 是 a 的所有正因数的和, 如果两个正整数 a 与 b 满足:

$$\sigma(a) = \sigma(b) = a + b \tag{1}$$

则称 (a, b) 是一对亲和数. 相反, 对于给定的正整数 a 如果不存在任何正整数 b 适合式 (1), 则称 a 是孤立数.

由于当一对亲和数 (a, b) 适合 $a = b$ 时, a 即为著名的完全数, 所以亲和数与孤立数一直是数论中的一个引人关注的课题.

2000 年, Luca^[1] 证明了: 所有的 Fermat 数都是孤立数.

2005 年, 乐茂华证明了: 2 的方幂都是孤立数.

2006 年, 乐茂华证明了: 任何奇素数的 $2r$ 次幂都是孤立数.

2007 年, 李伟勋证明了: 所有的 Mersenne 数都是孤立数.

2008 年, 乐茂华证明了: 任何奇素数的奇素数次幂都是孤立数; 同年, 李伟勋证明了: 若奇素数 $p \geq 2^2$, 则 p^r 是孤立数.

本文运用初等数论的方法证明了以下一般性的结果:

定理 1 设 p 是奇素数, r 是正整数, ε 是实数, 若

$$0 < \varepsilon \leq 1, r > [\varepsilon(1 + \varepsilon)]^{\frac{1}{\varepsilon}}, p > 2r^{1+\varepsilon}$$

则 p^r 都是孤立数.

2 关键性引理

引理 1 设正整数 a 的标准分解式为 $a = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \cdots p_k^{r_k}$,

$$\text{则 } \sigma(a) = a \sum_{i=1}^k \left(1 + \frac{1}{p_i} + \cdots + \frac{1}{p_i^{r_i}} \right).$$

引理 2 设 $a > 2$ 则 $\sigma(a) < 2a \ln a$.

引理 3 设 r 是正整数, ε 是实数, 且 $0 < \varepsilon \leq 1$, 若 $x > 2r^{1+\varepsilon}$, 则当 $r > \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$ 时, 有 $x > 2\ln x^r$.

证明 令 $f(x) = x - 2\ln x^r$, 则 $f'(x) = 1 - \frac{2r}{x}$. 当 $x > 2r$ 时, $f(x)$ 是增函数.

(1) 如果 $\varepsilon = 1$, 那么 $r > 2$ 这时, 而 $f(2^2) = 2r(r - \ln 2 - 2\ln r) > 0$, 故当 $x \geq 2^2$ 时, 有 $f(x) > 0$ 即 $x > 2\ln x^r$.

(2) 如果 $0 < \varepsilon < 1$ 那么 $r > \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$, 这时 $2r^{1+\varepsilon} > 2r$, 而

$$f(2r^{1+\varepsilon}) = 2r^{1+\varepsilon} - 2\ln(2r^{1+\varepsilon})^r = 2r(r^\varepsilon - \ln 2 - (1 + \varepsilon) \ln r) > 0$$

事实上, 令 $g(r) = r^\varepsilon - \ln 2 - (1 + \varepsilon) \ln r$, 由

$$g'(r) = \frac{\varepsilon}{r^{1-\varepsilon}} - \frac{1+\varepsilon}{r} = \frac{\varepsilon r^\varepsilon - (1+\varepsilon)}{r} > 0$$

及 $r > 1$ 知

$$g(r) > g(1) = 1 - \ln 2 > 0$$

引理 3 得证。

3 定理证明

令 $a = p^r$, 这里 p 是奇素数, r 是正整数, 且满足

$$p > 2r^{1+\varepsilon}, r > \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}, 0 < \varepsilon \leq 1$$

则由引理 3 知

$$p > 2\ln p^r \quad (2)$$

假定 a 不是一个孤立数, 我们能找到适当的正整数 b 满足式 (1)。根据引理 1, 我们有

$$\sigma(a) = \sigma(p^r) = 1 + p + \dots + p^{r-1} + p^r \quad (3)$$

因此, 由 (1) 式、(3) 式可得

$$b = 1 + p + \dots + p^{r-1} \quad (4)$$

及

$$\sigma(b) = \sigma(a) = pb + 1 \quad (5)$$

考虑 (4) 式中, $b = \frac{p^r - 1}{p - 1} < \frac{p^r}{p - 1} \leq p^r$ 。由引理 2 得

$$\sigma(b) < 2b \ln b < 2b \ln p^r \quad (6)$$

结合 (5) 式、(6) 式, 可得

$$p < 2\ln p^r \quad (7)$$

(2) 式与 (7) 式矛盾, 说明 a 是一个孤立数。定理得证。

显然 $\varepsilon = 1$ 时, 得到文献 [6] 中的结论, 因此定理 1 是文献 [6] 的推广。

参考文献:

- [1] Luca F. The anti-social Fermat numbers [J]. Amer Math Monthly 2000 107(2): 171-173
- [2] 乐茂华. 2 的方幂都是孤立数 [J]. 四川理工学院学报, 自然科学版, 2005 8(3): 1-2
- [3] 乐茂华. 形如 p^{2r} 的孤立数 [J]. 商丘师范学院学报, 2006 22(5): 25-26
- [4] 李伟勋. Mersenne 数 M_p 都是孤立数 [J]. 数学研究与评论, 2007, 27(4): 693-696
- [5] 乐茂华. 奇素数方幂中的孤立数 [J]. 湖北民族学院学报: 自然科学版, 2008 26(4): 361-363.
- [6] Li Weikun All Prime Cubes Are Anti-Sociable Numbers [J]. Journal of Mathematical Research and Exposition 2008 28(3): 498-500
- [7] 华罗庚. 数论导引 [M]. 北京: 科学出版社, 1989
- [8] Sandor J On certain limits for arithmetical functions [J]. Octagon Math Mag 2007, 15(1): 280-282

On the Anti-sociable Numbers in Powers of Odd Primes

GUAN Xun-gui

(Mathematics & Physics of Taizhou Normal College, Taizhou 225300, China)

Abstract Let n be a positive integer, the sum of all the positive divisors of n is defined by $\sigma(n)$. Suppose that a is a positive integer, then a is called an anti-sociable number if only there is not the positive integer k $\sigma(a) = \sigma(b) = a + b$. By using some elementary number theory methods in this paper, the fact that with $p > 2r^{1+\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leq 1$, if p is an odd prime, ε is a real number, and r is a positive integer with $r > \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\varepsilon}}$, is proved.

Key words amicable pair; anti-sociable number; odd prime; positive integer; power