

分数布朗运动下认股权证的保险精算定价

马惠馨, 薛红, 杨珊

(西安工程大学理学院, 西安 710048)

摘要: 文章在标的资产价格遵循由分数布朗运动驱动的随机微分方程的条件下, 利用保险精算方法, 得到了认股权证的定价公式。

关键词: 分数布朗运动; 保险精算定价; 认股权证

中图分类号: O211.6 F830.9

文献标识码: A

近年来, 随着世界各国期权交易所的出现, 作为金融数学的主要分支之一的期权定价理论得到了迅速发展。而且, 国际金融市场涌现出了大量由标准期权变化、组合和派生而来的新品种, 即新型期权。因此对这些新型期权进行定价尤为重要。

期权定价问题是金融数学中的核心问题之一。文献 [1] 假定股票价格服从几何 Brown 运动, 用无套利复制的方法证明了著名的 Black-Scholes 公式。这一开创性的工作被誉为现代金融理论的又一次“革命”。实际研究发现, 几何 Brown 运动并不是刻画股票价格过程的理想工具。文献 [2] 通过实测数据分析, 发现几何 Brown 运动与市场实际有一定差距, 通过实证分析发现, 有些股票的价格波动具有自相似性, 长期相依性等特征。而分数 Brown 运动具有自相似性, 长期相依性, 使得它能够很好地刻画股票波动规律。文献 [3] 首次提出期权定价的保险精算方法, 其基本思想是: 无风险资产(确定的)按无风险利率折现, 风险资产(随机的)按期望收益率折现。将期权定价转化为一个保险问题, 利用公平保费原则, 在无何市场假设条件下, 证明了当股票价格服从几何 Brown 运动时, 保险精算定价与无套利定价是一致的, 依此证明了著名的 Black-Scholes 公式。本文利用保险精算定价方法, 给出股票价格服从参数为 H ($0 < H < 1$) 的几何分数 Brown 运动的认股权证定价公式。

1 预备知识

设 $0 < H < 1$, Hurst 参数为 H 的分数布朗运动是一个连续 Gaussian 过程 $\{B_H(t), t \geq 0\}$ 满足 $E(B_H(t)B_H(s)) = \frac{1}{2}(|t|^H + |s|^H - |t-s|^H)$, $B_H(0) = 0$, $E(B_H(t)) = 0$ 特别地, 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, $B_H(t)$ 即为标准的布朗运动 $B(t)$ 。

假定分数型 Black-Scholes 市场有两种资产, 一种无风险资产(债券)价格满足方程

$$dM(t) = rM(t)dt \quad (1)$$

r 为无风险利率; 另一种是有风险的标的资产。其价格满足方程

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB_H(t) \quad (2)$$

其中, μ 为期望收益率, σ 为波动率, $\{B_H(t), t \geq 0\}$ 为定义在完备概率空间 (Ω, F, P) 上的分数布朗运动, F 是由 $\sigma\{B_H(s), 0 \leq s \leq t\}$ 生成的 σ -代数流。

引理 1^[4] 随机微分方程 (2) 的解为:

$$S_t = S \exp\{\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H} + \sigma B_H(t)\}, 0 \leq t \leq T \quad (3)$$

$$\text{且 } E(S_t) = S \exp\{\mu t + \frac{\sigma^2 V_H t^{2H}}{2} - \frac{1}{2}\sigma^2 t^{2H}\}.$$

2 认股权证的保险精算定价

认股权证是指持有人可以在特定的时间内, 按预定

的价格购买一定数量的公司发行的股票。认股权证属于一种期权,通常是购买权。因此对认股权证的估价可以采用期权定价理论来进行分析。

假设公司资本结构中仅有益资本,即是股票价值和认股权证价值的总和。用 V_t 表示公司原资产价值,用 n 表示已发行或拟发行股票的数量,则公司每股价值为 $S_t = \frac{V_t}{n}$, 用 K 表示认股权证的执行价。

若公司又发行了 q 股认股权证,且假设 1 个认股权证可购买 1 个股票,则在认股权证被执行时,每股价值为

$$S_t = \frac{V_t + qK}{n + q} = \frac{S_t + \frac{qK}{n}}{1 + \frac{q}{n}}$$

所以仅当 $\frac{S_t + \frac{qK}{n}}{1 + \frac{q}{n}} > K$ 时,持证人才会执行认股权。注意,认股权证的标的资产不是公司的股票,而是公司的每股价值。

定义 1^[5] 标的资产公司每股价值过程 $S_t = \frac{V_t}{n}$ 在 $[0, T]$ 产生的期望收益率 $\beta(t)$ 定义为 $e^{\int_0^t \beta(s) ds} = \frac{ES(T)}{S}$ 。

定义 2^[6] 认股权证在现在时刻的价值如下: 当认股权证被执行时,公司每股价值的折现值与预定执行价格的折现值之差,在公司每股价值实际分布的概率测度下的数学期望。其中,公司每股价值按期望收益率 $\beta(t)$ 折现; 执行价格按无风险利率 r 折现。即

$$W(K, T) = E \left[\left[e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \frac{S_T + \frac{qK}{n}}{1 + \frac{q}{n}} - e^{-rT} K \right] \cdot I \left\{ e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \frac{S_T + \frac{qK}{n}}{1 + \frac{q}{n}} > e^{-rT} K \right\} \right] \quad (4)$$

定理 1 假设公司情况如前所述,且公司每股价值过程 $\{S_t; t \geq 0\}$ 满足微分方程 (2), 则认股权证的保险精算价格

$$W(K, T) = \frac{1}{1 + \frac{q}{n}} \left[SN(d_1) - \left[e^{-rT} K \left(1 + \frac{q}{n} \right) - e^{-rT} K \frac{q}{n} \right] \cdot N(d_2) \right] \quad (5)$$

其中, $d_1 = -\frac{d - \sigma T^H}{T^H}$, $d_2 = -\frac{d}{T^H}$, $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{-\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

$$d = \frac{1}{\sigma} \left[\ln \frac{e^{(\mu-r)T} \cdot K \left(1 + \frac{q}{n} \right) - \frac{q}{n} K}{S} + \frac{1}{2} \sigma^2 T^H - \mu T \right]$$

证明 由引理 1, 可知 $B_H(t) \sim N(0, t^H)$ 。所以

$$\ln \frac{S_T}{S} \sim N \left(\mu T - \frac{1}{2} \sigma^2 T^H, \sigma^2 T^H \right)$$

$$e^{\int_0^T \beta(s) ds} = \frac{ES_T}{S} = e^{\mu T}$$

由于执行条件 $e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \frac{S_T + \frac{qK}{n}}{1 + \frac{q}{n}} > e^{-rT} K$ 等价于 $B_H(T) > d$, 其中

$$d = \frac{1}{\sigma} \left[\ln \frac{e^{(\mu-r)T + \frac{\sigma^2}{2}(V_H-1)} \cdot K \left(1 + \frac{q}{n} \right) - \frac{q}{n} K}{S} + \frac{1}{2} \sigma^2 T^H - \mu T \right]$$

那么

$$E \left[e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \frac{S_T + \frac{qK}{n}}{1 + \frac{q}{n}} \cdot I \left\{ e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \frac{S_T + \frac{qK}{n}}{1 + \frac{q}{n}} > e^{-rT} K \right\} \right] =$$

$$E \left[e^{-\int_0^T \beta(s) ds} \frac{S_T + \frac{qK}{n}}{1 + \frac{q}{n}} I \{ B_H(T) > d \} \right] =$$

$$E \left[e^{-\mu T} \frac{S_T + \frac{qK}{n}}{1 + \frac{q}{n}} I \{ B_H(T) > d \} \right] =$$

$$\frac{e^{-\mu T}}{1 + \frac{q}{n}} (E[S_T] \cdot I \{ B_H(T) > d \}) +$$

$$E \left[\frac{-qK}{n} \cdot I \{ B_H(T) > d \} \right] =$$

$$\frac{e^{-\mu T}}{1 + \frac{q}{n}} \left[S e^{\mu T - \frac{1}{2} \sigma^2 T^H} \int_d^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T^H}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz + \right.$$

$$\left. \frac{qK}{n} \int_d^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi T^H}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz \right] =$$

$$\frac{S}{1 + \frac{q}{n}} \int_d^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz_1 + \frac{e^{-\mu T}}{1 + \frac{q}{n}} \frac{q}{n}$$

$$K \int_d^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz_2 = \frac{S}{1 + \frac{q}{n}} N(d_1) + \frac{e^{-\mu T}}{1 + \frac{q}{n}} \frac{q}{n} KN(d_2) =$$

$$\frac{1}{1 + \frac{q}{n}} \left[SN(d_1) + e^{-\mu T} \cdot \frac{q}{n} \cdot KN(d_2) \right]$$

$$W = \frac{1}{1 + \frac{q}{n}} C$$

其中

$$z_1 = \frac{\gamma - \sigma T^H}{T^H}, \quad z_2 = \frac{\gamma}{T^H}$$

$$d_1 = -\frac{d - \sigma T^H}{T^H}, \quad d_2 = -\frac{d}{T^H}$$

同理可得

$$E[e^{-rT} K \cdot I\{B_H(T) > d\}] = e^{-rT} KN(d_2)$$

所以, 再根据 (4) 式, 可得

$$W(K, T) = \frac{1}{1 + \frac{q}{n}} \left[SN(d_1) - \left(e^{-rT} K \left(1 + \frac{q}{n} \right) - e^{-\mu T} K \frac{q}{n} \right) N(d_2) \right]$$

公式 (5) 得证。

注 1 当 $H = \frac{1}{2}$ 时, 就有文献 [6] 的结果

$$W(K, T) = \frac{1}{1 + \frac{q}{n}} \left[SN(d_1) - \left(e^{-rT} K \left(1 + \frac{q}{n} \right) - e^{-\mu T} K \frac{q}{n} \right) N(d_2) \right]$$

其中

$$d_1 = -\frac{d - \sigma T}{\sqrt{T}}, \quad d_2 = -\frac{d}{\sqrt{T}}$$

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

$$d = \frac{1}{\sigma} \left[\ln \frac{e^{\mu - rT} \cdot K \left(1 + \frac{q}{n} \right) - \frac{q}{n} K}{S} + \frac{1}{2} \sigma^2 T - W \right]$$

注 2 当 $H = \frac{1}{2}$, $\mu = r$ 时, 就有文献 [7] 中的结果

其中, C 为相应的没有发行认股权证的公司欧式看涨期权的价格。且进一步分析, 当投资者们对原生资产的期望回报率 μ 看法一致, 认为是无风险利率 r 时, 认股权证的定价不依赖于每个人的偏好以及对未来风险资产的期望值, 此时的定价是一个风险中性价格。

参考文献:

[1] Black F, Scholes M. The pricing of options and corporate liabilities [J]. Journal of Political Economy 1973, 81(3): 637-654.

[2] Lo A W, MacKinlay A C. Stock market prices do not follow random walks Evidence from a simple specification test [J]. Review of Financial Studies 1988, 22(1): 41-66.

[3] Mogens Bladt, Tina Hvuid Rydberg An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions [J]. Insurance Mathematics and Economics 1998, 22(1): 65-73

[4] Hu Y, Ksendal B Fractional white noise and applications to finance [J]. Appl math Optim, 2000, 41: 377-385

[5] 孙玉东, 薛红. 分数跳扩散环境下欧式期权定价的 Ornstein-Uhlenbeck 模型 [J]. 经济数学, 2009, 26(3): 23-28

[6] 钱丽丽. 期权定价问题的保险精算方法研究 [D]. 上海: 华东师范大学, 2007.

[7] 李楚霖, 杨明, 易江. 金融分析及应用 [M]. 北京: 首都经济贸易大学出版社, 2002

Actuarial Pricing for Warrants in Fractional Brownian Motion Environment

MA Hui-xin, XUE Hong, YANG Shan

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048 China)

Abstract Under the hypothesis that underlying asset price obeys stochastic differential equation driven by fractional Brownian motion, by means of actuarial approach, the pricing formula for warrants is presented.

Key words fractional Brownian motion; actuarial pricing; warrants