

Meta- sided exchange 环及其扩张

郭莉琴, 何建伟, 邵海琴

(天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001)

摘要: 讨论了 meta- sided exchange 环的性质。证明了如果 R 是 Abelian meta- sided exchange 环, 则对 R 的任意素理想 P , 都有 R/P 是局部环; 如果 R 是 Abelian 环, (S, \leq) 是严格序么半群且对任意 $s \in S$, 都有 $0 \leq s$, 则广义幂级数环 $[[R^s \leq]]$ 是 meta- sided exchange 环当且仅当 R 是 meta- sided exchange 环。

关键词: exchange 环; meta- sided exchange 环; 局部环; 广义幂级数环

中图分类号: O153.3

文献标识码: A

1 预备知识

文中除特别声明外, 总假定 R 是有单位元的结合环。记号 $U(R)$ 、 $J(R)$ 、 $Id(R)$ 和 $C(R)$ 分别表示环 R 的单位群、 R 的 Jacobson 根、由 R 的幂等元构成的集合和由 R 的中心元构成的集合。

定义 1^[1] 称 R 是 exchange 环, 如果对每个右 R -模 A_R 及其任意两个分解 $A_R = M_R \oplus N_R = \sum_{i \in I} A_i \oplus B_i$ 都存在子模 $A'_i \subseteq A_i$, 使得 $A_R = M_R \oplus (\sum_{i \in I} A'_i)$, 其中 $M_R \cong R_R$, $|I| < \infty$ 。

文献 [1] 中给出了等价刻画: R 是 exchange 环当且仅当对任意 $x \in R$, 存在 $e^2 = e \in R$, 使得 $e \in Rx$, $1-e \in R(1-x)$ 。并且说明这也是左右对称的。

定义 2^[2] 称 R 是 meta- sided exchange 环, 如果对任意 $x \in R$, 存在 $e^2 = e \in R$, 使得 $e \in Rx$, $1-e \in (1-x)R$ 。meta- sided exchange 环并没有上述的对称结构。

从定义 1 和定义 2 可以看出, meta- sided exchange 环是 exchange 环的推广。

定义 3^[3] 称环 R 的元素 r 是 clean 元, 如果 $r = e + u$ 其中 $e \in Id(R)$, $u \in U(R)$ 。称 R 是 clean 环, 如果 R 的每个元素都是 clean 元。

定义 4^[3] 称 R 是 Abelian 环, 如果 R 的幂等元是中心元。

引理 1^[3] clean 环是 exchange 环。

引理 2^[2] 设 R 是 Abelian 环, 则以下等价:

- (1) R 是 exchange 环;
- (2) R 是 meta- sided exchange 环。

引理 3^[4] 以下等价:

- (1) R 是局部环;
- (2) $J(R) = \{x \in R \mid x \text{ 不可逆}\}$;
- (3) 如果 $x \in R$, 则 x 可逆或 $1-x$ 可逆。

2 主要结果

命题 1 如果 R 是 Abelian meta- sided exchange 环, 则 $C(R)$ 是 meta- sided exchange 环。

证明 由文献 [5] 的命题 2.3 的证明过程及 R 是 Abelian 环可以看出, $x - (1-e)$ 和 $1-e$ 都是 R 的中心, 所以 $C(R)$ 是 clean 环, 由引理 1 和引理 2 知 $C(R)$ 是 meta- sided exchange 环。

然而, 在一般情况下命题 1 反过来不正确, 见例 1。

例 1 设 D 是除环, $S = \prod_{i=1}^{\infty} D_i$, 其中对所有 $i, D_i = D$, 如下定义:

$\alpha: S \rightarrow S, \alpha(a_1, a_2, a_3, \dots) = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ 则 α 是单射而不是满射。设 $R = S[x; \alpha]$ 是斜多项式环, 则 $C(R) = \{(a, a, a, \dots) \mid a \in C(D)\} \cong C(D)$ 。由文献 [6] 例 2.9 知 $C(R)$ 是 exchange 环, 从而是 meta-sided exchange 环, 而 0 是 Rx 中唯一的幂等元, 但 $1 \notin (1-x)R$ 。因此 R 不是 meta-sided exchange 环。

定理 1 设 R 是 Abelian meta-sided exchange 环, 则对 R 的任意素理想 P , 都有 R/P 是局部环。

证明 任取 $x + P \in R/P$, 由 R 是 meta-sided exchange 环知存在幂等元 $e \in R$, 使得 $e \in Rx, 1-e \in (1-x)R$ 。因为 P 是 R 的素理想, 所以 R/P 是素环。又因 $(e+P)(1-e+P) = \bar{0}$ 则 $e+P = \bar{0}$ 或 $e+P = \bar{1}$ 。如果 $e+P = \bar{0}$ 则存在 $r \in R$, 使得 $\bar{1} = (1-x+P)(r+P)$ 。即 $1-x+P$ 在 R/P 中右可逆。如果 $e+P = \bar{1}$, 则可得 $x+P$ 右可逆。这样 $x+P$ 或 $1-x+P$ 在 R/P 中右可逆。

假设 $x+P$ 在 R/P 中不可逆。如果 $x+P$ 在 R/P 中非左可逆, 则对任意 $r \in R, rx+P$ 在 R/P 中非左可逆。这样 $1-rx+P$ 在 R/P 中左可逆, 因此 $rx+P$ 左拟正则。这就证明了 $x+P \in J(R/P)$ 。如果 $x+P$ 在 R/P 中非右可逆, 则对任意 $s \in R, xs+P$ 在 R/P 中非右可逆。这样 $1-xs+P$ 在 R/P 中右可逆, $rx+P$ 右拟正则。因此 $x+P \in J(R/P)$ 。故

$J(R/P) = \{x+P \in R/P \mid x+P \text{ 在 } R/P \text{ 中不可逆}\}$
由引理 3 知 R/P 是局部环。

推论 1 设 R 是 reduced meta-sided exchange 环, 则对 R 的任意素理想 P , 都有 R/P 是局部环。

证明 每个幂等元 $e \in R$, 对任意 $x \in R$ 都有 $ex(1-e)$ 是幂零元, 因 R 是 reduced $ex(1-e) = 0$ 则 $ex = ex_e$ 同理 $xe = xe_e$ 这样 $ex = x_e$ 即 e 是中心幂等元。由定理 1 知 R/P 是局部环。

例 2 非零 meta-sided exchange 环 R 上的多项式环 $R[x]$ 不是 meta-sided exchange 环。

证明 设 R 是 meta-sided exchange 环。对 $x \in R[x], R[x]$ 有唯一的幂等元 0 如果 $R[x]$ 是 meta-sided exchange 环, 则 $1 \in (1-x)R[x]$, 即 $1-x$ 在 $R[x]$ 中是右可逆的, 这是不可能的。

下面讨论 meta-sided exchange 环 R 上的广义幂级数环 $[[R^S \leq]]$ 的 meta-sided exchange 性质。定义见文献 [3]。

设 (S, \leq) 是偏序集。称 (S, \leq) 是 Artin 的, 如果 S 中元素的任意严格降链是有限的。称 (S, \leq) 是 Narrow 的, 如果 S 中的任意由两两不可比较的元素构成的子集是有限的。设 S 是交换幺半群。除特别声明外, S 的运算记为加法, 幺元记为 0

设 (S, \leq) 是严格偏序幺半群 (即 (S, \leq) 是偏序幺半群且对任意 $s, s', t \in S$ 若 $s < s'$, 则 $s+t < s'+t$) 设 R 是环。记

$$A = [[R^{S \leq}]] = \{f: S \rightarrow R \mid f \text{ 是映射, 且 } \sup(f) = \{s \in S \mid f(s) \neq 0\} \text{ 是 Artin 的且是 Narrow 的}\}$$

按照分量加法, A 可构成一个 Abelian 加群, 对任意 $s \in S$ 和任意 $f, g \in A$, 记

$$X_s(f, g) = \{(u, v) \in S \times S \mid s = u + v, f(u) \neq 0, g(v) \neq 0\}$$

由文献 [3] 知, $X(f, g)$ 是有限的。因此可定义乘法运算: $(fg)(s) = \sum_{(u,v) \in X_s(f,g)} f(u)g(v)$ 。

按照上述加法和乘法运算, A 可构成一个环, 称为广义幂级数环。 A 中的元素称为系数在 R 中指数在 S 中的广义幂级数。关于广义幂级数环的例子和一些结果可见文献 [3]。

设 $r \in R$, 如下定义映射:

$$c_r \in A: c_r(0) = r, c_r(s) = 0 \quad \forall 0 \neq s \in S$$

引理 4 设 R 是环, (S, \leq) 是严格序幺半群且对任意 $s \in S$, 都有 $0 \leq s$ 则 $[[R^{S \leq}]]$ 是 clean 环当且仅当 R 是 clean 环。

定理 2 设 R 是 Abelian 环, (S, \leq) 是严格序幺半群且对任意 $s \in S$, 都有 $0 \leq s$ 则 $[[R^{S \leq}]]$ 是 meta-sided exchange 环当且仅当 R 是 meta-sided exchange 环。

证明 充分性: 设 R 是 Abelian 的 meta-sided exchange 环, 由定理 1 知 R 是 clean 环, 再由引理 4 知 $[[R^{S \leq}]]$ 是 clean 环, 从而 $[[R^{S \leq}]]$ 是 meta-sided exchange 环。

必要性: 设 $[[R]]$ 是 meta-sided exchange 环, 令 $W = \{f \in [[R^{S \leq}]] \mid f(0) = 0\}$ 。对 $\forall f \in W$ 和 $\forall g \in [[R^{S \leq}]]$, 有

$$(fg)(0) = \sum_{(u,v) \in X_0(f,g)} f(u)g(v) = f(0)g(0) = 0$$

这样 $fg \in W$, 同理 $gf \in W$, 易知 W 是 $[[R^{S \leq}]]$ 的理想。如下定义映射:

$$\alpha: R \rightarrow [[R^{S \leq}]]/W, \alpha(a) = c_a + W, \forall a \in R$$

显然 α 是环同态。对任意 $f \in [[R^{S \leq}]]$, 有

$$f + W = c_{f(0)} + W = \alpha(f(0))$$

所以 α 是满的环同态。显然 α 是单同态, 这样存在同构 $R \cong [[R^S \leq]] \mathcal{M}$ 。由引理 1 知, R 是 meta- sided exchange 环。

推论 2 设 R 是 Abelian 环, (S, \leq) 是严格序么半群且对任意 $s \in S$ 都有 $0 \leq_s$ 则 $[[R^S \leq]]$ 是 exchange 环当且仅当 R 是 exchange 环。

3 结束语

exchange 环包含许多重要的环类, 对它的研究源远流长, meta- sided exchange 环是 exchange 环的真推广, meta- sided exchange 环并没有和 exchange 环一样的对称结构, 这样它就包括了更多的环类。本文研究了 meta- sided exchange 环的性质。在 Abelian 条件证明了 meta- sided exchange 环的中心是 meta- sided exchange 环; 并且给出了反例说明该命题的逆命题不成立; 证明了 Abelian meta- sided exchange 环模它的素理想是局部环。给

出了非 meta- sided exchange 环的例子。最后讨论了广义幂级数环的 meta- sided exchange 性质。

参考文献:

- [1] Warfield R. Exchange rings and decompositions of modules[J]. Math Ann, 1972, 199(2): 31-36
- [2] Chen Huanyin On one-sided exchange rings[J]. Journal of Mathematics Study, 1998, 31(68): 145-148
- [3] Liu Z K. Special Properties of rings of generalized power series[J]. Comm Algebra, 2004, 32(45): 3215-3226
- [4] Anderson F W, Fuller K R. Rings and Categories of Modules[M]. New York: Springer-verlag, 1992
- [5] 唐再良, 张清. meta- sided exchange 环的性质及扩张[J]. 吉林师范大学学报: 自然科学版, 2008, 3(2): 34-36
- [6] Hong C Y, Kim N K, Lee Y. Exchange rings and their extensions[J]. J Pure Appl Algebra, 2003, 179(48): 117-126

Meta-sided Exchange Rings and Their Extensions

GUO Li-qin, HE Jian-w ei, SHAO Hai-qin

(School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China)

Abstract Some properties of meta-sided exchange rings are discussed in this paper. It is shown that if R be a meta-sided exchange ring with all idempotents central. R/P is local ring for any prime ideal P of R . And it also proved that let R be an Abelian ring and (S, \leq) a strictly ordered monoid satisfying the condition that $0 \leq_s$ for every $s \in S$, then generalized power series ring $[[R^S \leq]]$ is meta-sided exchange ring only if R is meta-sided exchange ring.

Key words exchange ring meta-sided exchange ring local ring generalized power series ring