

# 非平稳序列 $M_n^{(1)}$ 和 $M_n^{(2)}$ 的联合分布

蔺富明

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

**摘要:**  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  为标准化的正态序列,  $r_{ij} = Cov(\xi_i, \xi_j)$ ,  $M_n^{(k)}$  是  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  第  $k$  个最大值,  $L_n^{(k)}$  是其出现的位置, 文章在条件:  $j-i \rightarrow \infty$  时  $r_{ij} \log(j-i) \rightarrow \gamma \in (0, \infty)$  下, 得到了  $M_n^{(1)}$  和  $M_n^{(2)}$  的联合渐近分布。

**关键词:** 强相依非平稳高斯序列; 第  $k$  个最大值; 联合渐近分布

**中图分类号:** O212

**文献标识码:** A

## 引言

设  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  为标准化的正态序列,  $r_{ij} = Cov(\xi_i, \xi_j)$ 。当  $r_{ij} = r_{|j-i|}$  时称此序列为弱平稳的。文献 [1] 考虑了情形: 当  $n \rightarrow \infty$  时

$$r_{ij} = r_{|j-i|}, r_n \log n \rightarrow 0 \tag{1}$$

即  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  为弱相依平稳序列。在条件 (1) 式和正规化常数

$$a_n = (2 \log n)^{\frac{1}{2}} \tag{2}$$

$$b_n = a_n - (2a_n)^{-1} (\log \log n + \log 4\pi) \tag{3}$$

下, 文献 [1] 得到了极限分布

$$P\{a_n(M_n^{(1)} - b_n) \leq x_1, a_n(M_n^{(2)} - b_n) \leq x_2\}$$

$$P\{\frac{1}{n}L_n^{(2)} \leq t, a_n(M_n^{(2)} - b_n) \leq x\}$$

$M_n^{(1)}, M_n^{(2)}$  是序列的第一, 二个最大值,  $L_n^{(2)}$  为  $M_n^{(2)}$  出现的位置。关于  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  另外一种相依情形是, 当  $n \rightarrow \infty$  时

$$r_{ij} = r_{|j-i|}, r_n \log n \rightarrow \gamma > 0 \tag{4}$$

此时称序列为强相依平稳序列。关于此种情形的序列已有许多研究<sup>[1-5]</sup>, Anderson C W, Tuom an KF.

(1991), Hsing Tailen(1995) 和 HoHwai- Chung Hsing Tailen(1996) 考虑了  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  最大值与部分和的联合

极限分布。特别是文献 [1] 用点过程的方法得到了满足 (4) 式的序列最大值的极限分布。文献 [1] 首先证明了满足 (4) 式的  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  时间正则化上超水平  $u_n = x/a_n + b_n$  所形成的过程依分布收敛到  $(0, \infty)$  上的 Cox - 过程,

$$P(\bigcap_{i=1}^k \{N(B_i) = k_i\}) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^k \left\{ \frac{(m(B_i) \exp(-x - r + \sqrt{2rz}))^{k_i}}{k_i!} \exp\{-m(B_i) e^{-x-r+\sqrt{2rz}}\} \right\} \varphi(z) dz \tag{5}$$

然后根据点过程的收敛性得到了最大值的渐近分布。

考虑  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  具有较 (4) 式更一般的情形: 当  $j-i \rightarrow \infty$  时

$$r_{ij} \log(j-i) \rightarrow \gamma > 0 \tag{6}$$

此时称序列为强相依非平稳序列。文献 [6] 证明了满足 (6) 式的序列上超多水平形成的点过程收敛到二维的 Cox - 过程。本文受文献 [1, 6] 的启发, 用点过程的方法得到了满足 (6) 式序列的  $M_n^{(1)}$  和  $M_n^{(2)}$  的联合极限分布。

## 1 一些引理

本文选取的多水平  $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \dots, u_n^{(n)}$  应满足以下条件:

$D'(u_n)$  条件: 如果对平稳随机变量序列  $\{\xi_j\}$  和常数序列  $\{u_n\}$ , 有  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=2}^{n/k} P\{\xi_1 > u_n, \xi_j > u_n\} \rightarrow 0$  当  $k \rightarrow \infty$ , 称  $\{\xi_j\}$  满足  $D'(u_n)$  条件。

$D_r(u_n)$  条件: 如果对上述  $\{\xi_j\}$ , 任意选取  $i = (i_1, \dots, i_p), j = (j_1, \dots, j_p)$  其中  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_p < j_1 < j_2 < \dots < j_p \leq n, j_1 - i_p \geq l$  成立。

$|F_{i_j}(v, w) - F_i(v)F_j(w)| \leq \alpha_n$ , 其中  $v = (v_1, \dots, v_p), w = (w_1, \dots, w_p), v_i, w_j$  均是在  $r$  个常数值  $u_n^{(1)}, \dots, u_n^{(r)}$  中任意选取的, 对序列  $l_n = o(n)$ , 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\alpha_n \rightarrow 0$  则称  $\{\xi_j\}$  满足  $D_r(u_n)$  条件。

引理 1<sup>[1]</sup> 设  $\{X_n\}$  为弱相依平稳高斯序列,  $M_n^{(1)}, M_n^{(2)}$  是其最大值和次最大值, 且

$$P\{a_n(M_n^{(1)} - b_n) \leq x\} \xrightarrow{w} G(x) \quad (7)$$

成立, " $w$ " 表示弱收敛,  $G(x)$  是非退化的分布函数, 取  $u_n^{(k)} = x_k/a_n + b_n, k = 1, 2$  在  $\{X_n\}$  上  $D_2(u_n), D'(u_n^{(k)})$  条件满足, 那么对  $x_1 > x_2$  有

$$P\{a_n(M_n^{(1)} - b_n) \leq x_1, a_n(M_n^{(2)} - b_n) \leq x_2\} \xrightarrow{w} G(x_2) (\log G(x_1) - \log G(x_2) + 1)$$

其中,  $G(x_2) > 0$  当  $G(x_2) = 0$  时, 右端为 0 本文下面的收敛性均指弱收敛。

引理 2<sup>[1]</sup> 序列满足引理 1 中的条件, 对  $u_n^{(k)} = x_k/a_n + b_n, k = 1, 2, 3, 4, D_4(u_n), D'(u_n^{(k)})$  条件成立,  $M_n^{(2)}, L_n^{(2)}$  为序列的次最大值和位置, 则可以得到其联合分布为

$$P\{\frac{1}{n}L_n^{(2)} \leq t, a_n(M_n^{(2)} - b_n) \leq x\} \xrightarrow{w}$$

$$tG(x)(1 - \log G(x))$$

$x$  为正,  $0 < t \leq 1$

引理 3<sup>[6]</sup> 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  是标准正态随机变量, 相关系数  $r_{ij} = Cov(\xi_i, \xi_j)$ , 且满足 (4) 式。取水平满足  $u_n^{(1)} \geq u_n^{(2)} \geq \dots \geq u_n^{(r)}, u^{(k)} = x_k/a_n + b_n, 1 \leq k \leq r, a_n, b_n$  表达式见 (2) 式、(3) 式。  $N_n$  为  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  时间正规化上超水平  $u_n^{(1)}, u_n^{(2)}, \dots, u_n^{(r)}$  形成的点过程, 则  $N_n$  依分布收敛到定义在  $(0, \infty) \times R$  上的二维 Cox - 过程。

引理 4<sup>[6]</sup> 设  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  满足引理 3 的条件, 取  $B_1, B_2, \dots, B_r$  是波勒尔子集, 其边界的勒贝格测度为 0 则对整数  $m_j^{(k)}$ , 有

$$P\{N_n^{(k)}(B_j) = m_j^{(k)}, j = 1, 2, \dots, s, k = 1, 2, \dots, r\} \rightarrow P\{N^{(k)}(B_j) = m_j^{(k)}, j = 1, 2, \dots, s, k = 1, 2, \dots, r\}$$

## 2 主要结论及其证明

定理 1 取水平  $u_n^{(k)} (1 \leq k \leq r), u_n^{(1)} \geq u_n^{(2)} \geq \dots \geq u_n^{(r)}$ , 且满足

$$P\{\max_{1 \leq i \leq n} \xi_i \leq u_n^{(k)}\} \rightarrow \int_0^\infty \exp\{-e^{-x-y+\sqrt{2yz}}\} \varphi(z) dz \quad (8)$$

令  $S_n^{(k)}$  为满足引理 4 的序列  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  上超  $u_n^{(k)}$  的次数。则对  $k_1 \geq 0, \dots, k_r \geq 0$  有下面结论成立:

$$P\{S_n^{(1)} = k_1, S_n^{(2)} = k_2, \dots, S_n^{(r)} = k_1 + k_2 + \dots + k_r\} \rightarrow \frac{\tau_1^{k_1}}{k_1!} \cdot \frac{(\tau_2 - \tau_1)^{k_2}}{k_2!} \cdot \dots \cdot \frac{(\tau_r - \tau_{r-1})^{k_r}}{k_r!} \cdot \int_0^\infty (\exp(\sqrt{2yz} - y))^{k_1+k_2+\dots+k_r} \cdot \exp\{-e^{-x-y+\sqrt{2yz}}\} \varphi(z) dz \quad (9)$$

证明 根据引理 4 (9) 式左端收敛到

$$P\{S^{(1)} = k_1, S^{(2)} = k_2, \dots, S^{(r)} = k_1 + \dots + k_r\} \quad (10)$$

其中,  $S^{(i)} = N^{(i)}([0, 1])$ 。根据文献 [6] 中二维 Cox - 过程的定义, 参照文献 [1] 定理 5.6.1 的证明, (10) 式等价于

$$\frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_r)!}{k_1! k_2! \dots k_r!} \left(\frac{\tau_1}{\tau_r}\right)^{k_1} \left(\frac{\tau_2 - \tau_1}{\tau_r}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{\tau_r - \tau_{r-1}}{\tau_r}\right)^{k_r} \cdot P\{N^{(r)}((0, 1]) = k_1 + k_2 + \dots + k_r\}$$

根据 Cox - 过程又有

$$P\{N^{(r)}((0, 1]) = k_1 + k_2 + \dots + k_r\} = \int_0^\infty \frac{(\exp(-x_r - y + \sqrt{2yz}))^{k_1+k_2+\dots+k_r}}{(k_1 + k_2 + \dots + k_r)!} \cdot \exp\{-e^{-x-r+y+\sqrt{2yz}}\} \varphi(z) dz = \frac{[\exp(-x_r)]^{k_1+k_2+\dots+k_r}}{(k_1 + k_2 + \dots + k_r)!} \cdot \int_0^\infty [\exp(-y + \sqrt{2yz})]^{k_1+k_2+\dots+k_r} \cdot \exp\{-e^{-x-r+y+\sqrt{2yz}}\} \varphi(z) dz$$

简单带入即可完成定理的证明。

定理 2  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  满足定理 1 的条件, 且 (8) 式对  $k = 1$  成立,  $u^{(k)} = x_k/a_n + b_n, k = 1, 2$  满足  $D_2(u_n), D'(u_n^{(k)})$ , 则对  $x_1 > x_2$  有

$$P\{a_n(M_n^{(1)} - b_n) \leq x_1, a_n(M_n^{(2)} - b_n) \leq x_2\} \rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} [\exp(-x_2 - \gamma + \sqrt{2\gamma z}) - \exp(-x_1 - \gamma + \sqrt{2\gamma z}) + 1] \exp\{-e^{-x_2 - \gamma + \sqrt{2\gamma z}}\} \varphi(z) dz \quad (11)$$

证明 (11)式的左端等于

$$P\{M_n^{(1)} \leq u_n^{(1)}, M_n^{(2)} \leq u_n^{(2)}\} = P\{S_n^{(2)} = 0\} + P\{S_n^{(1)} = 0, S_n^{(2)} = 1\}$$

其中,  $S_n^{(i)}$  是  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  上超  $u_n^{(i)}$  的数目。根据定理 2 的条件易知此时定理 1 的结论是成立的, 简单代入定理 1 的结论即可完成证明。

注: 本文的定理 2 把引理 1 推广到了强相依非平稳的情形。

参考文献:

[1] Leadbetter M R, Lindgren G, Rootzen H. Extremes and Related Properties of Stationary Sequences and Processes[M]. New York Springer-Verlag, 1983.

[2] Anderson C W, Turkman K F. The Joint Limiting Distribution of Sums and Maximum of Stationary Sequences [J]. J Appl Probab, 1995, 28: 33-44

[3] Hsing Tai len , A Note on the Asymptotic Independence of the Sum and Maximum of Strongly Mixing Stationary Random Variables [J]. Ann Probab, 1996, 23: 938-947.

[4] 蔺富明. 强相依非平稳序列位置和高度联合极限分布 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(6): 26-28.

[5] 蔺富明. 高斯序列超过数点过程与和的联合渐近分布 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(2): 36-39

[6] 蒋莹莹, 蔺富明. 强相依非平稳序列上超点过程的收敛性 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(4): 26-28.

### Joint Asymptotic Distribution of $M_n^{(1)}$ and $M_n^{(2)}$ in Non-stationary Sequences

L N F u m i n g

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

**Abstract** Let  $\{\xi_i, i \geq 1\}$  be a standard normal sequences  $M_n^{(k)}$  is the  $k$  th maximum which appear at  $L_n^{(k)}$ . The paper under the condition  $\log(j-i) \rightarrow \gamma \in (0, \infty)$  ( $j-i \rightarrow \infty$ ), obtained the joint asymptotic distributions of  $M_n^{(1)}$  and  $M_n^{(2)}$ .

**Key words** strong dependent non-stationary Gaussian sequences; the  $k$  th largest maximum; joint asymptotic distribution

(上接第 512 页)

### A Characterizations of Semaphore Code

H U H u a - b i G U O K a i C H E N L i n

(School of Basic Medicine, Guiyang Medical College, Guiyang 550004, China)

**Abstract** Let  $X^*$  be the free monoid on the alphabet set  $X$ . The concept of a transversal of the language diagram  $\Gamma(X^*)$  is introduced by constructing a language diagram  $\Gamma(X^*)$  with  $X^*$  as the node set. Using the relation between the transversal of language diagram  $\Gamma(X^*)$  and maximal prefix code, i.e. a prefix code  $A$  is maximal if and only if  $A$  be a transversal of language diagram  $\Gamma(X^*)$ , a characterizations of semaphore code is given.

**Key words** Maximal prefix code; The transversal of language diagram  $\Gamma(X^*)$ ; Semaphore code