

信号码的一个刻划

胡华碧, 郭凯, 陈琳

(贵阳医学院基础医学院, 贵阳 550004)

摘要: 设 X^* 是字母表 X 的自由么半群, 以 X^* 为顶点集构造一个语言图 $\Gamma(X^*)$, 引入语言图 $\Gamma(X^*)$ 的模截集的概念。利用语言图 $\Gamma(X^*)$ 的模截集与极大前缀码的关系, 即前缀码 A 是极大前缀码的充要条件是 A 是语言图 $\Gamma(X^*)$ 的模截集, 给出了信号码的一个刻划。

关键词: 极大前缀码; 语言图 $\Gamma(X^*)$ 的模截集; 信号码

中图分类号: O152.7

文献标识码: A

1 基本概念

信号码是一类特殊的极大前缀码, 在实践和理论特别是理论计算机科学中有着重要的应用。因此研究信号码的结构及其相关理论具有重要意义。关于信号码的结构和性质, 已取得不少重要的成果^[1-6]。文献[7]中, 以 X^* 为顶点集构造一个语言图 $\Gamma(X^*)$, 首次引入语言图 $\Gamma(X^*)$ 的模截集的概念, 给出了极大前缀码的一个刻划。本文将利用文献[7-8]的结果, 给出信号码的一个刻划。

设 X 是一个字母表, X^+ (X^*) 是由 X 生成的自由(么)半群, X^* 的元素称为 X 上的字, 空字是 X^* 的单位元, 记为 ϵ 。如果 $A \subseteq X^*$ 非空, 则称 A 是 X^* 的一个语言。如果存在 $u \in X^*$, 使得 $X^* u X^* \cap A = \emptyset$, 称 A 是稀疏集。如果 $A \cap AX^+ = \emptyset$, 则称 A 是前缀码。如果前缀码 A 满足: 对任意 $\omega \in X^+ \setminus A$, 有 $A \cup \{\omega\}$ 不是前缀码, 则称 A 是极大前缀码。如果语言 A 满足: $A \cap X^+ AX^+ = \emptyset$, 则称 A 满足 $F-1$ 条件。如果极大前缀码 A 满足 $F-1$ 条件, 则称 A 是信号码。

文献[7]中, 以 X^* 为顶点集构造一个语言图 $\Gamma(X^*)$: 设字 $\omega_1, \omega_2 \in X^*$, 如果存在字母 $x \in X$, 使 $\omega_2 = \omega_1 x$, 则称字母 x 是一条以字 ω_1 为起点, 以 ω_2 为终点的有向边; 如果存在 $x \in X^+$, 使 $\omega_2 = \omega_1 x$, 则称 x 是一条由字

ω_1 通向字 ω_2 的路径。这样, 语言图 $\Gamma(X^*)$ 是一棵以空字 ϵ 为根, X 中的字母为有向边, X^* 中的字为结点的有向树。

定义 1 设 $A \subseteq X^+$ 非空, 令 $T_A = \bigcup_{\omega \in A} W_\omega$, W_ω 为语言图 $\Gamma(X^*)$ 中从根 ϵ 到结点 ω 的路径上所有结点(含 ω, ϵ)的集合。以 T_A 为结点, 空字 ϵ 为根构造一棵有向树, 称此有向树为语言图 T_A 。

定义 2 设 $A \subseteq X^+$ 非空, 若 A 满足: 对任意 $u \in T_A^c$, 有 $W_u \cap A \neq \emptyset$, 其中 $T_A^c = X^+ \setminus T_A$, 则称 A 是语言图 $\Gamma(X^*)$ 的模截集。

本文未定义的术语及记法参见文献[1]。

2 主要结果及证明

引理 1 设 A 是前缀码, 则 A 是极大前缀码的充要条件是 A 是语言图 $\Gamma(X^*)$ 的模截集。

证明 见文献[7]定理 4 定理 5。

引理 2 设 A 是前缀码, 则 A 是极大前缀码的充要条件是 $X^+ = A^* T_A$ 。

证明 见文献[8]定理 4。

引理 3 设 $A \subseteq X^+$, 若 A 满足 $F-1$ 条件, 则 A 是稀疏集。

证明 若 A 不是稀疏集, 则对任意 $x \in A$, 存在 $u, v \in X^*$, 使得 $ux^3v \in A$, 从而 $(ux)x(xv) \in X^+ AX^+ \cap A$, 与 A 满

足 $F - 1$ 条件矛盾.因此 A 是稀疏集.

引理 4 设 A 是稀疏集且 $M = \{u \in X^* : X^* uX^* \cap A = \Phi\}$, 则 M 是 X^* 的非空理想且 $M \cap T_A = \Phi$. 若 A 又是极大前缀码, 则 $M \subseteq T$, 其中 $T = A^+ T_A \mathbb{A}$.

证明 由 A 是稀疏集易知, M 是非空的. 任意取 $u \in M, s \in X^*$, 则 $X^* usX^* \subseteq X^* uX^*, X^* suX^* \subseteq X^* uX^*$, 于是由 $X^* uX^* \cap A = \Phi$ (因为 $u \in M$) 可得, $X^* usX^* \cap A = X^* suX^* \cap A = \Phi$ 从而 $us, su \in M$. 因此, M 是 X^* 的非空理想. 对任意 $x \in T_A$, 由 T_A 的定义知, 存在 $u \in X^*$, 使得 $xu \in A$, 于是 $xu \in X^* xuX^* \cap A$, 从而由 M 的定义可得, $xu \notin M$. 再由 M 是 X^* 的非空理想可得 $x \notin M$ (否则, $xu \in M$), 从而 $M \cap T_A = \Phi$. 若 A 又是极大前缀码, 则由引理 2 可得, $X^* = A^+ T_A = A \cup A^+ T_A$, 从而由 $M \cap A = \Phi$ (因为 $M \cap T_A = \Phi, A \subseteq T_A$) 可推出, $M \subseteq A^+ T_A \mathbb{A} = T$.

3 结 论

定理 1 设 $A \subseteq X^+$, 则 A 是信号码的充要条件是 $T = A^+ T_A \mathbb{A}$, 是 X^* 的非空理想且 $T = T_A^c$, 而且 $T = \{u \in X^* : X^* uX^* \cap A = \Phi\}$.

证明 充分性: 由 T 是 X^* 的非空理想知, $AT \subseteq T$, 于是由 $T = T_A^c$ 可得,

$$AX^+ = A[(T_A \setminus \{1\} \cup T_A^c)] = A[(T_A \setminus \{1\} \cup T)] = A(T_A \setminus \{1\}) \cup AT \subseteq (AT_A \cup T) = T (= T_A^c)$$

从而由 T 是 X^* 的非空理想可得,

$$X^+ AX^+ \subseteq X^+ T \subseteq T = T_A^c$$

由 $A \subseteq T_A$ 及 $AX^+, X^+ AX^+ \subseteq T_A^c$ 可得,

$$AX^+ \cap A = \Phi, X^+ AX^+ \cap A = \Phi$$

因此, A 是前缀码且满足 $F - 1$ 条件. 对任意 $x \in T_A^c$, 由 $T_A^c = T(T = A^+ T_A \mathbb{A})$ 及 W_x 的定义易知, $W_x \cap A \neq \Phi$, 于是 A 是语言图 $\Gamma(X^*)$ 的横截集, 从而由 A 是前缀码及引理 1 可得, A 是极大前缀码. 因此, A 是极大前缀码且满足 $F - 1$ 条件, 即 A 是信号码.

必要性: 若 A 是信号码, 我们断言 $T \cap T_A = \Phi$. 若存在 $u \in T \cap T_A$, 则由 T_A 的定义知, 存在 $v \in X^+$ (因为 $x \in T = A^+ T_A \mathbb{A}$, 所以 $v \neq 1$), 使 $uv \in A$, 于是

$$uv \in TX^+ \cap A = (A^+ T_A \mathbb{A})X^+ \cap A \subseteq A^+ T_A X^+ \cap A \subseteq AX^+ \cap A$$

与 A 是前缀码 (信号码是前缀码) 矛盾. 因此, $T \cap T_A = \Phi$. 由 A 是信号码知, A 是极大前缀码, 从而由 $A \subseteq T_A$ 及引理 2 可得,

$X^* = A^+ T_A = A^+ T_A \cup T_A = (A^+ T_A \mathbb{A}) \cup T_A = T \cup T_A$ 因此, $T = T_A^c$ (注意到 $T \cap T_A = \Phi$ 已证). 令 $M = \{u \in X^* : X^* uX^* \cap A = \Phi\}$, 由 A 信号码知, A 是极大前缀码且满足 $F - 1$ 条件, 从而由引理 3 引理 4 可得, M 是 X^* 的非空理想且 $M \subseteq T$. 只要能证明 $M = T$, 则 T 是 X^* 的非空理想且 $T = \{u \in X^* : X^* uX^* \cap A = \Phi\}$. 若存在 $u \in T \setminus M$, 则 $X^* uX^* \cap A \neq \Phi$ (因为 $u \notin M$), 于是存在 $x, y \in X^*$, 使 $xuy \in A$. 由 $u \in T = A^+ T_A \mathbb{A}$ 知, 存在 $a_1, \dots, a_r \in A, z \in T_A, r \geq 1$ 使 $u = a_1 \dots a_r z$ 从而 $xuy = xa_1 \dots a_r zy \in A$.

我们断言 $x \in X^+$. 若 $x = 1$, 则 $uy \in A$, 于是 $u \in W_{uy} \subseteq T_A$, 从而 $u \in T \cap T_A$ 与 $T \cap T_A = \Phi$

(已证) 矛盾. 因此, $x \in X^+$. 由 $u \notin A (u \in T = A^+ T_A \mathbb{A})$ 及 $u = a_1 \dots a_r z$ 可知,

(1) 若 $r = 1$, 则 $z \neq 1$ (因为 $u \notin A$), 从而 $xuy = xa_1(zy) \in A \cap X^+ AX^+$.

(2) 若 $r \geq 2$ 时, 则 $a_2 \dots a_r z \neq 1$ 从而 $xuy = xa_1(a_2 \dots a_r zy) \in A \cap X^+ AX^+$.

由 (1)、(2) 可得, $xuy \in A \cap X^+ AX^+$, A 满足 $F - 1$ 条件. 因此, $M = T$. 至此定理 1 得证.

参 考 文 献:

- [1] Berstel J, Perrin D. Theory of Codes[M]. New York: Academic Press, 1985.
- [2] Guo Y Q, Thérien G, Zhang S H. Semaphore Codes and Ideals[J]. Journal of Information & Optimization Sciences, 1988, 9(1): 73-83.
- [3] Long Dongyang, Jia Weijia, Ma Jian, et al. K-p-Infix Codes and Semaphore Codes[J]. Discrete Applied Mathematics, 2001, 109(3): 237-252.
- [4] Long Dongyang, Jia Weijia, Zhang Liang. Product of finite maximal P-codes[J]. International Journal of Computer Mathematics, 2002, 79(8): 889-899.
- [5] Satyanarayana M. Right Complete Codes[J]. Semigroup Forum, 2002, 64: 443-452.
- [6] 夏华庆, 沈传龙. 信号码的一个充要条件[J]. 杭州师范学院学报: 自然科学版, 2005, 4(1): 7-9.
- [7] 赵平, 徐波. 极大前缀码的刻划[J]. 数学的实践与认识, 2007, 37(9): 168-171.
- [8] 赵平. 关于极大前缀码的刻划的一个注记[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(2): 158-160.

(下转第 515 页)

$$\int_0^{\infty} [\exp(-x_2 - \gamma + \sqrt{2\gamma z}) - \exp(-x_1 - \gamma + \sqrt{2\gamma z}) + 1] \exp\{-e^{-x_2 - \gamma + \sqrt{2\gamma z}}\} \varphi(z) dz \quad (11)$$

证明 (11)式的左端等于

$$P\{M_n^{(1)} \leq u_n^{(1)}, M_n^{(2)} \leq u_n^{(2)}\} = P\{S_n^{(2)} = 0\} + P\{S_n^{(1)} = 0, S_n^{(2)} = 1\}$$

其中, $S_n^{(i)}$ 是 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 上超 $u_n^{(i)}$ 的数目。根据定理 2 的条件易知此时定理 1 的结论是成立的, 简单代入定理 1 的结论即可完成证明。

注: 本文的定理 2 把引理 1 推广到了强相依非平稳的情形。

参考文献:

[1] Leadbetter M R, Lindgren G, Rootzen H. Extremes and Related Properties of Stationary Sequences and Processes[M]. New York Springer-Verlag, 1983.

[2] Anderson C W, Turkman K F. The Joint Limiting Distribution of Sums and Maximum of Stationary Sequences [J]. J Appl Probab, 1995, 28: 33-44

[3] Hsing Tai len, A Note on the Asymptotic Independence of the Sum and Maximum of Strongly Mixing Stationary Random Variables [J]. Ann Probab, 1996, 23: 938-947.

[4] 蔺富明. 强相依非平稳序列位置和高度联合极限分布 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(6): 26-28.

[5] 蔺富明. 高斯序列超过数点过程与和的联合渐近分布 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(2): 36-39

[6] 蒋莹莹, 蔺富明. 强相依非平稳序列上超点过程的收敛性 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(4): 26-28.

Joint Asymptotic Distribution of $M_n^{(1)}$ and $M_n^{(2)}$ in Non-stationary Sequences

LN Fuming

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

Abstract Let $\{\xi_i, i \geq 1\}$ be a standard normal sequences $M_n^{(k)}$ is the k th maximum which appear at $L_n^{(k)}$. The paper under the condition $\log(j-i) \rightarrow \gamma \in (0, \infty)$ ($j-i \rightarrow \infty$), obtained the joint asymptotic distributions of $M_n^{(1)}$ and $M_n^{(2)}$.

Key words strong dependent non-stationary Gaussian sequences; the k th largest maximum; joint asymptotic distribution

(上接第 512 页)

A Characterizations of Semaphore Code

HU Hua-bi GUO Kai CHEN Lin

(School of Basic Medicine, Guiyang Medical College, Guiyang 550004, China)

Abstract Let X^* be the free monoid on the alphabet set X . The concept of a transversal of the language diagram $\Gamma(X^*)$ is introduced by constructing a language diagram $\Gamma(X^*)$ with X^* as the node set. Using the relation between the transversal of language diagram $\Gamma(X^*)$ and maximal prefix code, i.e. a prefix code A is maximal if and only if A be a transversal of language diagram $\Gamma(X^*)$, a characterizations of semaphore code is given.

Key words Maximal prefix code; The transversal of language diagram $\Gamma(X^*)$; Semaphore code