

带有负债的投资组合最优策略的研究

袁 敏, 刘宣会, 薛 赟

(西安工程大学理学院, 西安 710048)

摘 要: 文章在完备的金融市场下, 构造了带有负债和风险资产的连续时间的均值-方差投资组合选择模型。假定风险资产的价格过程由布朗运动加跳所驱动, 而负债的价格过程则是由带有漂移的布朗运动驱动, 并且考虑风险资产与负债之间的关系。其最终的目标是最大化期望终端财富同时最小化其方差。在连续时间的情形下, 运用随机最优控制理论解决资产与负债的管理问题。即, 通过使用一般的随机线性二次控制方法得到最优控制策略。

关键词: 投资组合; 负债; 均值-方差模型; 随机线性二次控制

中图分类号: O 211.6

文献标识码: A

引 言

自从 Markowitz^[1]的开创性工作以来, 均值-方差投资组合问题得到了广泛而深入的研究。Merton^[2]研究了带有消费的连续时间模型; Koo^[3]考虑了有劳动收入的连续时间消费模型; Li 和 Ng^[4]研究了动态的多周期的均值-方差模型; Zhou 和 Li^[5]研究了在随机 LQ 框架下的多周期的均值-方差投资组合选择模型。

上述都没有考虑带有负债的情况。在现实的情况下, 负债是很多投资者必须要面对的一个重要因素。关于负债主要集中在资产与负债的管理问题, Leppold 和 Trojan^[6]研究了一个在均值-方差的准则下的多周期的资产与负债的管理问题, 采用嵌入式手法得到了最优策略的具体表达式和有效边界。Chiu 和 Li^[7]在均值-方差的准则下, 研究了连续时间的资产与负债的管理问题, 风险资产和负债的价格过程由相同的布朗运动所驱动, 采用随机控制理论得到了最优投资策略和有效边界。

文章研究了在完备的金融市场下, 带有负债的连续时间的投资组合选择问题。仅考虑两种资产和一种负债的情形, 假定风险资产的价格过程由布朗运动加跳所驱动, 而负债的价格过程则是由带有漂移的布朗运动驱动, 并且考虑风险资产与负债之间存在着关系。可以借

助求解一个随机 LQ 辅助控制问题来得到最优投资组合策略。

1 模型的建立

考虑这样一个金融市场, 不确定性来自两个驱动因素: 一个概率空间 (Ω^W, F^W, P^W) 上的 R -值布朗运动 $W(t)$, 另一个是概率空间 (Ω^N, F^N, P^N) 上强度为 $\lambda(t)$ 的 R -值泊松过程 $N(t)$, 其中 $\{F_t^W\}$ 是 $\sigma(W(s); 0 \leq s \leq t)$, $\{F_t^N\}$ 为 $\sigma(N(s); 0 \leq s \leq t)$, 定义完备的概率空间 $(\Omega, F, P) = (\Omega^W \times \Omega^N, F^W \otimes F^N, P^W \otimes P^N)$, $W(t)$ 与 $N(t)$ 在空间 (Ω, F, P) 上相互独立。 $C([0, T]; R)$ 为全体 R -值连续函数类, $L^2([0, T]; R)$ 指的是 Hilbert 空间上全体 R -值循序可测、平方可积的随机变量族。

考虑金融市场有两种资产在 $[0, T]$ 上被连续交易, 投资者允许调整资产头寸而无须交付交易费, 资产允许卖空。投资初始财富 $\omega (\omega > 0)$ 和负债 l 表示净财富 $(x = \omega - l)$ 。

对于 $\forall t \in [0, T]$, 无风险资产的价格过程 A_t^0 满足下列微分方程

$$dA_t^0 = r_t A_t^0 dt, A_0^0 = 1 \quad (1)$$

$r_t \in C([0, T]; R^+)$ 是无风险利率。

风险资产价格过程 A_t^1 的微分形式为

$$dA_t^1 = \mu A_t^1 dt + \sigma A_t^1 dW_t + \alpha A_t^1 dN_t, A_0^1 = a_i \in R \quad (2)$$

σ_i 是风险资产的扩散率, μ_i 是风险资产的利率。

投资者在 t 时刻的累积负债 L_t 满足微分方程

$$dL_t = u_t dt + v_t dB_p, L_0 = l \quad (3)$$

其中 $\{B_p; t \in [0, T]\}$ 和 $\{W_p; t \in [0, T]\}$ 均为布朗运动, 且 N_t 与 W_p, B_t 相互独立。

由于 W_p, B_t 相关^[3], 令 ρ 表示 B_t 和 W_t 之间的相关系数, 则 B_t 可以表示为 W_t 和 W_t^0 的线性组合, $\forall t \in [0, T]$ 有

$$B_t = \rho W_t + \sqrt{1 - \rho^2} W_t^0, \rho \leq 1 \quad (4)$$

因此

$$dL_t = u_t dt + v_t \rho dW_t + v_t \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^0, L_0 = l \quad (5)$$

假定市场系数 $r_t, \mu_i, \sigma_p, u_p, v_p, \varphi_i, \rho_i$ 是 t 的确定性函数, 并且 $\mu_i > r_p$, 对任意 $t \in [0, T], X_t$ 表示投资者在 t 时刻的总财富, θ_i 表示 i 种资产的份额。 $\pi_i^i = \theta_i A_i^i (i = 0, 1)$ 是投资在 i 种资产的市场值。过程 $\pi = \{\pi_i; t \in [0, T]\}$ 是投资策略, 很显然, 无风险资产 π_0^0 的市场值为 $\pi_0^0 = X_t - \pi_1^1$ 。

如果在 t 时刻股票发生交易, 在 $(t, t+h]$ 内保持 t 时刻交易后所持有的投资组合头寸不变, 则有

$$X_{t+h} - X_t = \theta_t^0 (A_{t+h}^0 - A_t^0) + \theta_t^1 (A_{t+h}^1 - A_t^1) \quad (6)$$

假设投资者必须在 $(t, t+h]$ 上必须支付的累积负债额为 $(L_{t+h} - L_t)$, (6)式变为

$$X_{t+h} - X_t = \theta_t^0 (A_{t+h}^0 - A_t^0) + \theta_t^1 (A_{t+h}^1 - A_t^1) - (L_{t+h} - L_t) \quad (7)$$

让 $h \rightarrow 0$, 则

$$dX_t = \theta_t^0 dA_t^0 + \theta_t^1 dA_t^1 - dL_t \quad (8)$$

考虑 (1)式、(2)式、(5)式, 可以得到

$$\begin{cases} dX_t = (r_t X_t + b_t \pi_t - u_t) dt + (\pi_t \sigma_t + \xi_t) dW_t + \xi_t^0 dW_t^0 + \alpha_t \pi_t dN_t \\ X_t = x \end{cases} \quad (9)$$

这里 $b_t = (\mu_t - r_t) \in C([0, T]; R)$

$$\xi_t = -v_t \rho_t \in C([0, T]; R)$$

$$\xi_t^0 = -v_t \sqrt{1 - \rho_t^2} \quad (10)$$

初始财富为 x 的可达策略集定义为: $A(x) = \{\pi \mid \pi_i \in L_F^2([0, T]; R), (X_p, \pi_i)$ 满足 (9) 式}。

投资者的目标是确定一个最优策略 $\pi \in A(x)$, 最大化期望终端财富 EX_p , 最小化终端财富的方差, 则均值-方差模型表示为以下的双目标最优问题

$$P \min_{\pi \in A(x)} (-EX_p, VarX_T)$$

P 等价于单目标最优化问题^[4]

$$P(x) \min_{\pi \in A(x)} (-EX_T + \lambda VarX_T)$$

这里参数 $\lambda \in [0, \infty]$ 表示投资者对风险的偏好程度。

定义 $\Pi_{P(x)} = \{\pi \mid \pi$ 是 $P(x)$ 最优策略}。

2 辅助问题及最优策略

由于问题 $P(x)$ 的目标函数包含 $VarX_T$ 项, 随机 LQ 控制方法不能直接解 $P(x)$, 引入辅助问题^[5] $A(x, \omega) = \min_{\pi \in A(x)} E(X_T^2 - \omega X_T)$, $\omega \in R$. 定义 $\Pi_{A(x, \omega)} = \{\pi \mid \pi$ 是 $A(x, \omega)$ 的最优策略}。则 $P(x)$ 与 $A(x, \omega)$ 的关系可表示为 $\Pi_{P(x)} \subseteq \Pi_{A(x, \omega)}$ 。

定理 1^[5] $\forall x > 0$ 有 $\Pi_{P(x)} \subseteq \Pi_{A(x, \omega^*)}$, 而且如果 $\pi^* \in \Pi_{P(x)}$, 那么 $\pi^* \in \Pi_{A(x, \omega^*)}$ 。 $\omega^* = 1 + 2\lambda EX_T^*$, X_t^* 是策略 π^* 的价格过程。

令 $y = \frac{\omega}{2\lambda}$, $Y_t = X_t - y$, 则 (9) 式为

$$\begin{cases} dY_t = (r_t Y_t + b_t \pi_t + r_t y - u_t) dt + (\pi_t \sigma_t + \xi_t) dW_t + \xi_t^0 dW_t^0 + \alpha_t \pi_t dN_t \\ Y_0 = y = x - y \end{cases} \quad (11)$$

则辅助问题 $A(x, \omega)$ 的目标函数变为 $E(X_T^2 - \frac{\omega^2}{4\lambda})$ 。进

而, 可达策略集 $A(x)$ 可以写为 $\Lambda(y) = \{\pi \mid \pi_i \in L_F^2([0, T]; R), (Y_p, \pi_i)$ 满足 (11) 式}。因此, 辅助问题等价于随机 LQ 控制问题 $A(y) = \min_{\pi \in \Lambda(y)} J(\pi; y)$

其中,

$$J(\pi; y) = E(\frac{X}{2} Y_T^2) \quad (12)$$

$A(y)$ 的值函数可以定义为 $J^* = J(\pi^*; y) = \min_{\pi \in \Lambda(y)} J(\pi; y)$

这里 π^* 是问题 $A(y)$ 的最优解。

通过解随机 LQ 控制问题 $A(y)$, 给出辅助问题 $A(x, \omega)$ 的最优策略。解决随机 LQ 控制问题的关键在于求解相应的随机黎卡提方程。若随机黎卡提方程有解, 则随机 LQ 控制问题的最优控制以状态反馈的形式出现, 下面主要研究最优反馈控制问题。

根据一般随机 LQ 最优控制理论^[8], 给出相应于问题的随机黎卡提方程

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_t + (2r_t - \xi_t^1 - \xi_t^2) \varphi_t = 0 \\ \varphi_T = x \quad a.e. t \in [0, T] \\ \varphi_t \sigma_t^2 > 0, \varphi_t \alpha_t^2 > 0 \end{cases} \quad (13)$$

以及

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_t + (r_t - \xi_t^1 - \xi_t^2) \varphi_t + (r_t y + k_t) \varphi_t = 0 \\ \varphi_T = 0 \end{cases} \quad (14)$$

这里 $\bar{\varphi}_t = \frac{d\varphi}{dt}$

$$\bar{\varphi}_t = \frac{d\varphi_t}{dt}$$

$$k_t = -b_t h_t - u_t \in C([0, T]; R)$$

$$\begin{aligned}
 h_t &= (\sigma_t^2)^{-1} \alpha_t \delta_t \in C([0, T]; R) \\
 \zeta_t^1 &= b_t \tau_t^1 \in C([0, T]; R^+) \\
 \zeta_t^2 &= b_t \tau_t^2 \in C([0, T]; R^+) \\
 \tau_t^1 &= (\sigma_t \sigma_t)^{-1} b_t \in C([0, T]; R) \\
 \tau_t^2 &= (\alpha_t \alpha_t)^{-1} b_t \in C([0, T]; R)
 \end{aligned} \tag{15}$$

求解 (13) 式、(14) 式得到:

$$\begin{aligned}
 \varphi_t &= x \left(\frac{k}{r} + y \right) \left[e^{(2r - \zeta_t^1 - \zeta_t^2)(T-t)} - e^{(r - \zeta_t^1 - \zeta_t^2)(T-t)} \right] \\
 \varphi_t &= x e^{(2r - \zeta_t^1 - \zeta_t^2)(T-t)} \quad \forall t \in [0, T]
 \end{aligned} \tag{16}$$

定理 2 如果 (13) 式和 (14) 式分别有解 $\varphi(t) \in C([0, T]; R^+)$ 和 $\varphi_t \in C([0, T]; R)$, 那么随机 LQ 控制问题 $A(y)$ 有最优反馈控制

$$\pi_t = \frac{-\tau_t^1 \tau_t^2 Y_t - \tau_t^1 \tau_t^2 \vartheta_t - h_t \tau_t^2 - (\vartheta_t + Y_t) \lambda^2 \alpha_t \tau_t^1}{\lambda^2 \tau_t^1 + \tau_t^2} t \in [0, T] \tag{17}$$

这里

$$\vartheta_t = \frac{\varphi_t}{\varphi_t} = \left[\frac{k}{r} + y \right] [1 - e^{-r(T-t)}] \tag{18}$$

证明 运用 Itô 公式于 $\frac{1}{2} \varphi_t Y_t^2$ 和 $\varphi_t Y_t$

$$d(\varphi_t Y_t) = [\zeta_t^1 Y_t \varphi_t + \zeta_t^2 Y_t \varphi_t - (r_t y + k_t) \varphi_t Y_t + (b_t \pi_t + r_t y - u_t) \varphi_t] dt + \varphi_t \alpha_t \pi_t dN + (\dots) dW + (\dots) dW_t^0 \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} d(\varphi_t Y_t^2) &= \frac{1}{2} \{ [\zeta_t^1 \varphi_t Y_t^2 + \zeta_t^2 \varphi_t Y_t^2 \\
 &+ 2(b_t \pi_t + r_t y - u_t) \varphi_t Y_t] dt \\
 &+ 2Y_t \varphi_t \alpha_t \pi_t dN + \varphi_t (\pi_t \sigma_t + \delta_t)^2 dt + \varphi_t (\delta_t^0)^2 dt \\
 &+ \varphi_t (\alpha_t \pi_t)^2 dN + (\dots) dW + (\dots) dW_t^0 \tag{20}
 \end{aligned}$$

联立 (19) 式、(20) 式, 两边取期望, 相加后得到

$$\begin{aligned}
 J(\pi_t, y) - \frac{1}{2} \varphi_0 y^2 - \varphi_0 y \\
 = E \int_0^T \left\{ \left[\frac{1}{2} \zeta_t^1 \varphi_t Y_t^2 + \frac{1}{2} \zeta_t^2 \varphi_t Y_t^2 + \zeta_t^1 Y_t \varphi_t + \frac{1}{2} \varphi_t (\delta_t^0)^2 \right. \right. \\
 + (b_t \pi_t - k_t - u_t) \varphi_t Y_t + (b_t \pi_t + r_t y - u_t) \varphi_t + \zeta_t^2 Y_t \varphi_t \\
 + \frac{1}{2} \varphi_t (\pi_t \sigma_t + \delta_t)^2 + \lambda^2 \varphi_t Y_t \alpha_t \pi_t + \frac{1}{2} \lambda^2 \varphi_t (\alpha_t \pi_t)^2 \\
 \left. \left. + \lambda^2 \varphi_t \alpha_t \pi_t \right] \right\} dt \tag{21}
 \end{aligned}$$

引入函数

$$\begin{aligned}
 I(\pi_t) &= \frac{1}{2} \zeta_t^1 \varphi_t Y_t^2 + \frac{1}{2} \zeta_t^2 \varphi_t Y_t^2 + \zeta_t^1 Y_t \varphi_t + \zeta_t^2 Y_t \varphi_t \\
 &+ (b_t \pi_t - k_t - u_t) \varphi_t Y_t + (b_t \pi_t + r_t y - u_t) \varphi_t \\
 &+ \frac{1}{2} \varphi_t (\pi_t \sigma_t + \delta_t)^2 + \frac{1}{2} \varphi_t (\delta_t^0)^2 + \lambda^2 \varphi_t Y_t \alpha_t \pi_t \\
 &+ \frac{1}{2} \lambda^2 \varphi_t (\alpha_t \pi_t)^2 + \lambda^2 \varphi_t \alpha_t \pi_t
 \end{aligned}$$

求上述问题的极值问题

令

$$\begin{aligned}
 I'(\pi_t) &= 0 \\
 b_t \varphi_t Y_t + b_t \varphi_t + \varphi_t (\pi_t \sigma_t + \delta_t) \sigma_t + \lambda^2 \varphi_t Y_t \alpha_t \\
 + \lambda^2 \varphi_t \alpha_t^2 \pi_t + \lambda^2 \varphi_t \alpha_t &= 0
 \end{aligned}$$

因此

$$\pi_t = \frac{-\tau_t^1 \tau_t^2 Y_t - \tau_t^1 \tau_t^2 \vartheta_t - h_t \tau_t^2 - (\vartheta_t + Y_t) \lambda^2 \alpha_t \tau_t^1}{\lambda^2 \tau_t^1 + \tau_t^2}$$

将最优策略代入 (21) 式得到最优价值函数 J^* 。

由于问题 $A(x)$ 和 $A(x \omega)$ 等价, 定理 2 给出辅助问题 $A(x \omega)$ 的最优反馈控制

$$\begin{aligned}
 \pi^*(X_t) &= \frac{-\tau_t^1 \tau_t^2 (X_t - y_t) - \tau_t^1 \tau_t^2 \vartheta_t - h_t \tau_t^2}{\lambda^2 \tau_t^1 + \tau_t^2} \\
 &- \frac{(\vartheta_t + (X_t - y_t)) \lambda^2 \alpha_t \tau_t^1}{\lambda^2 \tau_t^1 + \tau_t^2} \tag{22}
 \end{aligned}$$

这里 τ_t , h_t 和 ϑ_t 分别由 (15) 式、(17) 式给出。

注: 由定理 1 可知, 若 $P(x)$ 的最优解存在, 则可通过选择 ω^* , 使得 $\omega^* = 1 + 2EX_T^* | \omega$, 其中, $EX_T^* | \omega = EX_T^* | y$, $y^* = \frac{\omega^*}{2x^*}$ 于是, $P(x)$ 或 P 的最优策略由 (22) 式给出, 其中 $y^* = y$

参考文献:

- [1] Markowitz H. Portfolio selection[J]. Journal of Finance, 1952, 7: 77-91.
- [2] Merton R. C. Optimum consumption and Non-Arbitrage [M]. Beijing Science Press, 2001.
- [3] Koo H. K. Consumption and portfolio selection with labor income: A continuous time approach[J]. Mathematical Finance, 1998, 8(1): 49-65.
- [4] Li D, Ng W. L. Optimal dynamic portfolio selection: Multi-Period mean-variance formulation[J]. Mathematical Finance, 2000, 10(3): 387-413.
- [5] Zhou X. Y., Li D. Continuous-time mean-variance portfolio selection: a stochastic LQ framework[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2000, 42: 19-33.
- [6] Leppölä M, Trojani E, Vanini P. A geometric approach to multi-period mean-variance optimization of assets and liabilities[J]. Journal of Economics Dynamics and Control, 2004, 28: 1079-1113.
- [7] Chiu M. C., Li D. Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework [J]. Insurance Mathematics and Economics, 2006, 39(3): 330-355.
- [8] Yong J, Zhou X. Y. Stochastic Controls: Hamiltonian Systems and HJB Equations[M]. New York: Springer-Verlag, 1999.

(下转第 124 页)

表 3 旋转后的因子矩阵

	Component		
	1	2	3
score(x_1)	.819	.419	.143
score(x_2)	.039	.255	.922
score(x_3)	.395	.863	.092
score(x_4)	.228	.834	.304
score(x_5)	.916	.263	.001
score(x_6)	.571	.783	.071
score(x_7)	.773	.257	-.422
score(x_8)	.820	.396	.271

随着计算机的应用与发展,主成分分析和因子分析在经济、社会等方面将得到广泛的应用。本文主要是从理论和应用上对比分析主成分分析和因子分析这两种

方法,未能对主成分分析和因子分析算法提出改进。

参考文献:

- [1] 彭丽,冯维波.基于因子分析的重庆市县域综合实力评价[J].四川理工学院学报:自然科学版,2009,22(4):116-118
- [2] 米红,张文璋.实用现代统计分析方法与SPSS应用[M].北京:当代中国出版社,2000
- [3] 林海明.对主成分分析法运用中十个问题的解析[J].统计与决策:理论版,2007,(8):16-18
- [4] 理查德,约翰逊,迪安,等.实用多元统计分析[M].北京:清华大学出版社,2008
- [5] 魏艳华,王丙参,田玉柱.主成分分析与因子分析的比较研究[J].天水师范学院学报,2009,(3):13-15

Application and Comparison of Principal Components Analysis and Factor Analysis in Urban Consumption

RONG Wen-jing

(College of Information and Management, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China)

Abstract The principal components and factor analysis are the important methods to simplify structure of data, and they have both differences and ties. This paper introduces these two methods from the perspective of data analysis and the concept of information. At the same time, according to the analysis and comparison in urban consumption expenditure by these two methods, it's convenient for us to choose a reasonable approach in practice, and help to make more effective analysis and evaluation to economic phenomena.

Key words principal components analysis; factor analysis; urban consumption; SPSS

(上接第 121 页)

Study of Continuous-time Portfolio Optimal Strategy with Liability

YUAN Min, LIU Xuan-hui, XUE Yun

(School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an 710048, China)

Abstract In this paper, we formulate mean-variance portfolio selection model with risky asset and liability in a complete market. The risky asset's price is driven by geometric Brownian motion with drift while the liability evolves according to a Brownian motion. The correlations between the risky asset and liability are considered. We employ stochastic optimal control theory to analytically solve the asset-liability management problem in a continuous-time setting. More specifically, we derive the optimal policy from a stochastic linear quadratic control framework.

Key words portfolio; liability; mean-variance model; stochastic linear-quadratic control