

三重二次数域的整基

王志兰

(泰州师范高等专科学校数理科学系, 江苏 泰州 225300)

摘要: 文章研究了三重二次数域 $K = Q(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ 的判别式 $d(K)$ 及其整基 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$, 并完全确定了三重二次数域的判别式及其整基。

关键词: 判别式; 整基; 三重二次数域

中图分类号: O151

文献标识码: A

引言

设 K 是一个代数数域且 K/Q 是 Galois 扩张, 不妨设 $[K:Q] = n$, 而且它的 Galois 群为 $Gal(K/Q) = \{\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n\}$. O_K 是 K 的代数整数环, 熟知 O_K 在 Z 上有一组整基, 也就是说 O_K 是秩为 n 的自由 Z -模。

本文将研究三重二次数域 $K = Q(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ $[K:Q] = 8$ 且 m_1, m_2, m_3 是无平方因子的整数的判别式 $d(K)$ 及其整基 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$.

设 $K = Q(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ $[K:Q] = 8$ 且 m_1, m_2, m_3 是无平方因子的整数, 那么 K 恰好有七个二次子域 $Q(\sqrt{m_1}), Q(\sqrt{m_2}), Q(\sqrt{m_3}), Q(\sqrt{m_1 m_2}), Q(\sqrt{m_2 m_3}), Q(\sqrt{m_1 m_3}), Q(\sqrt{m_1 m_2 m_3})$.

设它的 Galois 群为 $Gal(K/Q) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, 其中 $\sigma_i(\sqrt{m_j}) = -\sqrt{m_j}, \sigma_i(\sqrt{m_j}) = \sqrt{m_j}, i \neq j$.

以下计算 $d(K)$.

1 三重二次数域的判别式

引理 1 对于每个代数数域 K , 则 $(-1)^{r_2} d(K) > 0$ 其中 r_2 表示代数数域 K 的复嵌入对的个数。

证明 显然。

命题 1 $K = Q(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ $[K:Q] = 8$ 其中整数 m_1, m_2, m_3 不含平方因子, 则它的复嵌入对的个数 $r_2 = 0$ 或 4.

证明 由于

$$K = Q(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3}) = Q(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3})$$

令 $\alpha = \sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3}$, 则 α 在 Z 上的极小多项式为

$$f(x) = \prod_{i=1}^8 (x - \alpha_i)$$

其中

$$\alpha_1 = \alpha$$

$$\alpha_2 = -\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3}$$

$$\alpha_3 = \sqrt{m_1} - \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3}$$

$$\alpha_4 = \sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} - \sqrt{m_3}$$

$$\alpha_5 = -\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2} + \sqrt{m_3}$$

$$\alpha_6 = -\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2} - \sqrt{m_3}$$

$$\alpha_7 = \sqrt{m_1} - \sqrt{m_2} - \sqrt{m_3}$$

$$\alpha_8 = -\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2} - \sqrt{m_3}$$

如果 m_1, m_2, m_3 均大于 0 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ 均为实根, $r_1 = 8, r_2 = 0$.

如果 m_1, m_2, m_3 不全不大于 0 则 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ 均为虚根, $r_1 = 0, r_2 = 4$.

推论 1 $K = Q(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ $[K:Q] = 8$ 其中整数 m_1, m_2, m_3 不含平方因子, 则 $d(K) > 0$.

证明 显然。

定理 1 $K = Q(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ $[K:Q] = 8$ 其中整数 m_1, m_2, m_3 不含平方因子, 则 K 的判别式为:

(1) 如果 2 在 K 的 7 个二次子域中均不分歧, 则

$$d(K) = \left(\frac{(m_1, m_2, m_3)m_1m_2m_3}{(m_p, m_2)(m_2, m_3)(m_p, m_3)} \right)^4$$

(2) 如果 2 在 K 的 7 个二次子域中恰好有 4 个是分歧的, 则

$$d(K) = \left(\frac{2^2(m_p, m_2, m_3)m_1m_2m_3}{(m_p, m_2)(m_2, m_3)(m_p, m_3)} \right)^4$$

(3) 如果 2 在 K 的 7 个二次子域中恰好有 6 个是分歧的, 则

$$d(K) = \left(\frac{2^3(m_p, m_2, m_3)m_1m_2m_3}{(m_p, m_2)(m_2, m_3)(m_p, m_3)} \right)^4$$

其中 $(m_1, m_2, m_3), (m_p, m_j)$ 均表示最大公约数.

为了证明定理 1, 需要下面的一些基本事实.

设 K/Q 是 Galois 扩张, 如果 Galois 群 $Gal(K/Q)$ 是 $Abel$ 群, 则称 K 为 $Abel$ 数域. 根据 Kronecker-Weber 定理, 每个 $Abel$ 数域均是分圆域的子域.

设 $Q(\zeta_m)$ (m 和 2 对于模 4 不同余), 是包含 $Abel$ 数域 K 的最小分圆域, 即 $m = cond(K)$ 数域 K 的导子. 我们有如下的 Galois 对应:

$Q(\zeta_m)$	$\{1\}$
K	H
Q	$G = Gal(Q(\zeta_m)/Q)$

由于 $G \cong (Z/mZ)^*$, 其中 $\sigma_a \mapsto a \pmod{m}, (a, m) = 1, \sigma_a(\zeta_m) = \zeta_m^a$. 从而 H 同构于 $(Z/mZ)^*$ 的一个子群. 常把 H 和这个子群等同起来, 而 $Gal(K/Q)$ 同构于商群 $(Z/mZ)^*/H$.

把这两者等同起来, 有限 $Abel$ 群 $Gal(K/Q) = (Z/mZ)^*/H$ 的每个特征 χ 也叫做是域 K 的特征, 而 $(Z/mZ)^*/H$ 的特征群也叫做是 K 的特征群, 表示成 \hat{K} , 于是 \hat{K} 实际上是有全部在 H 上的平凡的模 m 的 Dirichlet 特征所构成的.

设 χ 为模 m 的 Dirichlet 特征, 则 χ 是由惟一决定的一个模 m' 的本原 Dirichlet 特征所诱导出来的, 其中 $m' = cond(\chi), m' | m$. 我们将诱导出 χ 的这个本原 Dirichlet 特征表示成 χ^* .

引理 2 (Hasse 判别式 - 导子公式) 设 K 为 $Abel$ 数域, 则 $|d(K)| = \prod_{\chi \in \hat{K}} cond(\chi)$.

证明 显然.

定理 1 的证明: 设 $Gal(K/Q) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, 其中

$$\sigma_i(\sqrt{m_i}) = -\sqrt{m_p}, \sigma_i(\sqrt{m_j}) = \sqrt{m_p}, i \neq j$$

情形 (1) 如果 2 在 K 的 7 个二次子域中均不分歧,

则 $m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv 1 \pmod{4}$, 从而 \hat{K} 中的 7 个导子分别为 $m_p, m_2, m_3, \frac{m_1m_2}{(m_p, m_2)^2}, \frac{m_1m_3}{(m_1, m_3)^2}, \frac{m_2m_3}{(m_2, m_3)^2},$

$$\frac{m_1m_2m_3(m_1, m_2, m_3)^4}{(m_p, m_2)^2(m_1, m_3)^2(m_2, m_3)^2}$$

利用引理 2 和推论 1, 可知结论成立.

(2)、(3) 两种情形可类似证明. 证毕.

2 三重二次数域的整基

定理 2 设 $K = Q(\sqrt{m_p}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$, 其中 $[K:Q] = 8$, 且 m_p, m_2, m_3 是无平方因子整数, O_K 为 K 的代数整数环.

(1) 如果 2 在 K 的 7 个二次子域中均不分歧, 且 $(m_p, m_2, m_3) \equiv (1, 1, 1) \pmod{4}$, 则

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \frac{1 + \sqrt{m_1}}{2}, \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{m_2}}{2},$$

$$\alpha_3 = \frac{1 + \sqrt{m_3}}{2}, \alpha_4 = \frac{1 + \sqrt{m_{12}}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{m_2}}{2},$$

$$\alpha_5 = \frac{1 + \sqrt{m_{13}}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{m_2}}{2},$$

$$\alpha_6 = \frac{1 + \sqrt{m_{23}}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{m_3}}{2},$$

$$\alpha_7 = \frac{1 + \sqrt{m_{123}}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{m_2}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{m_3}}{2},$$

为 O_K 的一组整基.

(2) 如果 2 在 K 的 7 个二次子域中恰好有 4 个是分歧的, 且 $(m_1, m_2, m_3) \equiv (a, 1, 1) \pmod{4}$, 其中 $a = 2$ 或 3, 则

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \sqrt{m_p}, \alpha_2 = \frac{1 + \sqrt{m_2}}{2},$$

$$\alpha_3 = \frac{1 + \sqrt{m_3}}{2}, \alpha_4 = \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_{12}}}{2},$$

$$\alpha_5 = \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_{13}}}{2}, \alpha_6 = \frac{1 + \sqrt{m_{23}}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{m_3}}{2},$$

$$\alpha_7 = \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_{123}}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{m_3}}{2},$$

为 O_K 的一组整基.

(3) 如果 2 在 K 的 7 个二次子域中恰好有 6 个是分歧的, 且 $(m_1, m_2, m_3) \equiv (3, 2, 1) \pmod{4}$, 则

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = \sqrt{m_p}, \alpha_2 = \sqrt{m_2},$$

$$\alpha_3 = \frac{1 + \sqrt{m_3}}{2}, \alpha_4 = \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_{12}}}{2},$$

$$\alpha_5 = \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_{13}}}{2}, \alpha_6 = \frac{\sqrt{m_2} + \sqrt{m_{23}}}{2}$$

$\alpha_7 = \frac{\sqrt{m_1} + \sqrt{m_{123}}}{2} \cdot \frac{1 + \sqrt{m_3}}{2}$, 为 O_K 的一组整基。

此处

$$m_i = \frac{m_j m_k}{(m_p m_j)^2}, i \neq j$$

$$m_{123} = \frac{m_1 m_2 m_3 (m_1, m_2, m_3)^4}{(m_p m_2)^2 (m_p m_3)^2 (m_2, m_3)^2}$$

定理 2 的证明。

(1) 如果 2 在 K 的 7 个二次子域中均不分歧, 且

$$(m_p, m_2, m_3) \equiv (1, 1, 1) \pmod{4}, \text{ 则}$$

$$d(1, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7) =$$

1	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6	α_7
1	$\sigma_1(\alpha_1)$	$\sigma_1(\alpha_2)$	$\sigma_1(\alpha_3)$	$\sigma_1(\alpha_4)$	$\sigma_1(\alpha_5)$	$\sigma_1(\alpha_6)$	$\sigma_1(\alpha_7)$
1	$\sigma_2(\alpha_1)$	$\sigma_2(\alpha_2)$	$\sigma_2(\alpha_3)$	$\sigma_2(\alpha_4)$	$\sigma_2(\alpha_5)$	$\sigma_2(\alpha_6)$	$\sigma_2(\alpha_7)$
1	$\sigma_3(\alpha_1)$	$\sigma_3(\alpha_2)$	$\sigma_3(\alpha_3)$	$\sigma_3(\alpha_4)$	$\sigma_3(\alpha_5)$	$\sigma_3(\alpha_6)$	$\sigma_3(\alpha_7)$
1	$\sigma_{12}(\alpha_1)$	$\sigma_{12}(\alpha_2)$	$\sigma_{12}(\alpha_3)$	$\sigma_{12}(\alpha_4)$	$\sigma_{12}(\alpha_5)$	$\sigma_{12}(\alpha_6)$	$\sigma_{12}(\alpha_7)$
1	$\sigma_{13}(\alpha_1)$	$\sigma_{13}(\alpha_2)$	$\sigma_{13}(\alpha_3)$	$\sigma_{13}(\alpha_4)$	$\sigma_{13}(\alpha_5)$	$\sigma_{13}(\alpha_6)$	$\sigma_{13}(\alpha_7)$
1	$\sigma_{23}(\alpha_1)$	$\sigma_{23}(\alpha_2)$	$\sigma_{23}(\alpha_3)$	$\sigma_{23}(\alpha_4)$	$\sigma_{23}(\alpha_5)$	$\sigma_{23}(\alpha_6)$	$\sigma_{23}(\alpha_7)$
1	$\sigma_{123}(\alpha_1)$	$\sigma_{123}(\alpha_2)$	$\sigma_{123}(\alpha_3)$	$\sigma_{123}(\alpha_4)$	$\sigma_{123}(\alpha_5)$	$\sigma_{123}(\alpha_6)$	$\sigma_{123}(\alpha_7)$

$$= \left[\frac{m_1 m_2 m_3 (m_1, m_2, m_3)}{(m_1, m_2) (m_2, m_3) (m_p, m_3)} \right]^4 = d(K)$$

其中 $\sigma_j = \sigma_i \cdot \sigma_p, \sigma_{123} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$

所以 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ 为 K 的一组基。

(2)、(3) 两种情形的证明类似。

参 考 文 献:

- [1] 纪春岗. $(2, 2, \dots, 2)$ 型数域的正规整基 [J]. 南京师范大学学报: 自然科学版, 1997, 20(1): 56-59.
- [2] Ji Chungang On Normal Integral Bases [J]. Northeast Math J, 1998, 14(1): 105-111
- [3] Williams K S Integers of Biquadratic Fields [J]. Canad Bull 1970, 13: 519-526
- [4] 冯克勤. 代数数论 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.
- [5] 刘丽. 四次域 $Q(\sqrt{m}, \sqrt{n})$ 的正规整基的存在性 [J]. 合肥工业大学学报: 自然科学版, 2006, 29(4): 47-51.
- [6] 方玲玲. 正规整基及生成元的惟一性 [D]. 南京: 南京师范大学硕士学位论文, 2008

Integral Basis of Triquadratic Number Fields

WANG Zhilan

(Department of Mathematics and Physics, Taizhou Teachers College, Taizhou 225300, China)

Abstract On the base of previous studies, the discriminant $d(K)$ and the integral basis $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ of triquadratic number fields $K = Q(\sqrt{m_1}, \sqrt{m_2}, \sqrt{m_3})$ are studied in the paper. At last, the discriminant and the integral basis of triquadratic number fields are obtained.

Key words discriminant, integral basis, triquadratic number fields

(上接第 32 页)

Existence Theorem for a Class of p-Laplacian Equation

LILin^{1,2}, ZHONG Xin², YI Yao³

(1 School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

(2 Department of Mathematics and Statistics, Southwest University, Beibei 400715, China)

(3 Bashu Middle School of Chongqing, Yuzhong 400000, China)

Abstract The Calderon-Zygmund inequality and Schauder fixed point theorem due to the perturbation method are used to study a class p-Laplacian elliptic equation $-\Delta_p u + f(x, u \nabla u) = h(x), u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Under some sufficient conditions of f , the equation existence of a weak solution is also proved in the paper.

Key words perturbation method, Calderon-Zygmund inequality, weak maximum principle