

具有很多素数方幂阶子群的有限群

张科锋

(南海东软信息技术学院基础部, 广东 佛山 528225)

摘要:文章以 p -群和内 Σ 群研究成果为基础,以它们的研究方法为依托,采用反证法、分析法,得到若干成果,丰富了研究内 Σ 群这一领域的成果。文章首先以可解次单群的结构和性质,引出所讨论的任一真子群为素数方幂阶的有限群的结构和性质,给出一个有限群满足这一性质的充分必要条件,得到了若干结论,并且指出了任一真子群为素数方幂阶的有限群和有限次单群、 CP -群之间的包含关系。最后,进一步拓宽这一性质,引出外 p -群的定义,给出了一个外 p -群的必要条件。

关键词:次单群; p -群; 内 p -群; IP -群

中图分类号: O 152 1

文献标识码: A

只有唯一一个非平凡正规子群的群叫做次单群。文献 [1]通过对次单群幂零性的讨论,给出了关于可解次单群结构的一些结论。在次单群的分类中,有一类次单群特别重要,这类次单群的任一真子群都是素数方幂阶群。从这点出发,本文在此基础上,对满足任一真子群为素数方幂阶的有限群进行了更深入的讨论。最后引进外 p -群的概念,并对其结构进行了研究,得到了一些结论,丰富了研究内 Σ 群这一领域的成果。

1 基本引理与定理

本文中涉及的群都是有限群,使用符号和术语都是标准的。

引理 1^[2] 设 G 是有限群,则下述事项等价:

- (1) G 可解;
- (2) 对每个素数集合 π , G 都是 π -可分群(或 π -可解群);
- (3) 对每个素数 p , G 都是 p -可解群;
- (4) 对任意的 $1 \neq N \triangleleft G$, 存在素数 p 使 $O_p(\frac{G}{N}) \neq 1$;
- (5) 对任意的 $1 \neq N \triangleleft G$, 存在 $\frac{G}{N}$ 的特征子群 $\frac{K}{N} \triangleleft \frac{G}{N}$ 使 $\frac{K}{N}$ 是初等交换 p -群。

引理 2^[3] 设 G 是 π -可分群,则:

- (1) G 的 π -Hall 子群和 π' -Hall 子群总是存在

的;

(2) 只要 G 的所有 π -Hall 子群或所有 π' -Hall 子群是可解的,则 G 的所有 π -Hall 子群共轭,并且 G 的所有 π' -Hall 子群也共轭。

引理 3^[4] 设 G 为有限群。则下述两条均为 G 可解之充要条件:

- (1) G 的合成因子皆为素数阶循环群;
- (2) G 的主因子皆为素数幂阶的初等交换群。

引理 4^[21] 12 阶群有以下五种互不同构的类型:

(I) 交换群:

- (1) $G \cong Z_3 \times Z_4$
- (2) $G \cong Z_6 \times Z_2$

(II) 非交换群:

- (3) $G \cong A_4$
- (4) $G = [u, v], u^6 = 1, v^2 = 1, v^{-1}uv = u^{-1}$
- (5) $G = [u, v], u^6 = 1, v^2 = u^3, v^{-1}uv = u^{-1}$

定义 1 任一真子群为 p -群的有限群称为 IP -群。

定义 2 任一真子群为 p -群,但自身不是 p -群有限群,称为内 p -群。

明显内 p -群属于 IP -群。

p -群和 pq 阶群 (p, q 是不同的素数) 都是 IP -群,交代群 A_4 是 IP -群,且 pq 阶群 (p, q 是不同的素数) 和交代群 A_4 也是内 p -群。

定理 1^[1] G 交换有限次单群,则 G 是阶为 p^2 的循环群。

定理 2^[1] G 是非交换的可解有限次单群, 则 G' 是 G 的唯一的非平凡正规子群, 并且 G' 是初等交换 p -群, 此时 $|G| = p^n q$ $|G'| = p^n$, ($p \neq q$, p, q 为素数)。

2 可解次单群与 IP -群的关系

由定理 2 知道, 此时 G 的 $Sylawp$ -子群是一个初等交换 p -群且正规, 而 G 的 $Sylawq$ -子群是一个素数阶群且不正规, 于是 G 的非平凡的子群中含有初等交换 p -群和素数阶 q -群, 那么 G 是否含有 $p^i q$ ($i < n$) 阶的子群呢?

定理 3 G 是非交换的可解有限次单群, 则 G 的真子群都是素幂阶群。具体来说设 $|G| = p^n q$ 则 G 的真子群只能为初等交换 p -群或素数阶 q -群。

证明 此时 G' 是 G 的唯一的非平凡正规子群, $\left| \frac{G}{G'} \right| = q$ 故 G' 是 G 的极大子群, G' 必不是 G 的唯一的极大子群, 不然 G 就是循环群了^[6], 设 M 是 G 的另一个不同于 G' 的极大子群, 因为 $G' \cap M \triangleleft [G', M]$, 所以 $G' \cap M \triangleleft M$ 。而利用 G' 交换知 $G' \cap M \triangleleft G'$, 故 $G' \cap M \triangleleft [G', M]$ 。而 M 和 G' 是两个不同的极大子群, 所以 $[G', M] = G$, 所以 $G' \cap M \triangleleft G$ 而 $G' \cap M \neq G'$, 所以必有 $G' \cap M = 1$ 于是 $|M|$ 中不能有 p 作为因子, 只能是 $|M| = q$ 故 G 的极大子群都是 G 的 $Sylaw$ 子群, 所以 G 的真子群都是素幂阶的。

由定理 3 对可解次单群的分析, 可以得到:

定理 4 可解有限次单群一定是 IP -群。

那么定理 4 的逆命题是否成立呢? 这就牵扯到两个问题: 第一, IP -群是否可解? 第二, IP -群是否是次单群? 所以就要求从 IP -群的构造入手。

定理 5 内 p -群的 $Sylaw$ 子群都是极大子群。

证明 设 G 是内 p -群, 由于 G 不是 p -群, 利用 $Sylaw$ 定理, 所以 G 存在 $Sylaw$ 子群, 设 S 是 G 的任意一个 $Sylaw$ 子群, 设 $|S| = p^r$, 如果存在子群 K , 满足 $S < K < G$, 由于 $|S| \mid |K|$, $|S| \mid |G|$, 且 $p^{r+1} \nmid |G|$, 所以 $p^{r+1} \nmid |K|$, 于是 $|K|$ 的素数因子除了 p 一定还有其它的素因子, 所以 K 不是素幂阶群, 矛盾。

IP -群可能是幂零群, 如果某个 IP -群不是幂零群, 那么它一定是内幂零群, 因为它的任意真子群都是幂零的, 所以 IP -群要么是幂零群, 要么是内幂零群, 而这两种群都是可解的^[6], 所以 IP -群一定是可解群, 这样第一个问题就解决了。

定理 6 若 G 的每个真子群是 p -群, 则 G 的素因子最多两个, 即 $|G| = p^m$ 或 $|G| = p^m q^n$ 。

证明 IP -群一定是可解群, 利用引理 1, 则 G 是 π -可分群, 再利用引理 2 则 G 的 π -Hall 子群和 π' -Hall 子群总是存在的。设 $|G| = p^m q^n r^l \dots$, 则 G 必有 $p^m q^n$ 阶的 Hall 子群, 所以若 G 的每个真子群是 p -群, 则 G 的

素因子最多两个, 即 $|G| = p^m$ 或 $|G| = p^m q^n$ 。

定理 7 G 是 IP -群, 则 G 的类别有:

- (1) G 是 p -群;
- (2) $|G| = pq$ (p, q 是不同的素数);
- (3) $|G| = p^n q$ ($n > 1, p, q$ 为不同的素数) 且 G 是次单群, G 的 $Sylawp$ -子群是 G 的唯一非平凡正规子群并且是初等交换 p -群。

证明 假如 G 不是 p -群, 由于 G 可解, 则 G 存在极大正规子群 M ^[7], 且 $|G:M| = q$ 由于 $M < G$, 所以 M 是 p -群, 设 $|M| = p^n$, 于是 $|G| = p^n q$ 当 $n = 1$ 时, pq 阶群一定是 IP -群, 当 $n > 1$ 时, 设 Q 是 G 的 $Sylawq$ -子群, 则 $Q \triangleleft G$, 因为假如 $Q \triangleleft G$, 而利用 p -群性质, M 一定存在 p^{n-1} 阶子群 N ^[8], 于是 $QN < G$, 构成 G 的 $p^{n-1}q$ 阶的真子群, 矛盾。同样的方式, M 的任意非平凡子群也一定不正规, 于是 G 只有 M 一个唯一非平凡正规子群, 从而 G 是次单群。

由此可知, 可解次单群一定是 IP -群, 但是 IP -群未必是次单群, 例如 pq 阶交换群, 这样第二个问题解决了。

定理 8 G 是 IP -群的充分必要条件是 G 中阶互素且阶的乘积小于 $|G|$ 任两个真子群不能交换相乘。

证明 \Rightarrow 设 H, K 是 G 的两个真子群, 且 $(|H|, |K|) = 1$ $|H| \cdot |K| < |G|$, 如果有 $HK = KH$, 那么 HK 便构成 G 的真子群, 由于 HK 的阶互素, 所以 HK 至少含有两个不同的素因子, 这与 G 是 IP -群相矛盾。

\Leftarrow 假设 G 不是 IP -群, 取 G 的真子群中不是 p -群的最小阶的子群 H , 则 H 必定是内 p -群, 根据定理 7, 设 $|H| = p^n q$ $P \in Syl_p(H)$, $Q \in Syl_q(H)$, 则 P, Q 是 G 的互素阶的两个真子群且 $|P| \cdot |Q| < |G|$, 但是 $PQ = QP = H$, 这与已知矛盾了, 所以 G 是 IP -群。

定理 9 G 是 IP -群, 则 G 中互素阶非正规两真子群的正规化子不相交。

证明 设 H, K 是 G 的两个真子群, 且 $(|H|, |K|) = 1$ 由于 H, K 都非正规, 所以 $N_c(H), N_c(K)$ 都不等于 G 。设 $a \in N_c(H) \cap N_c(K)$, 则有 $[a]H = H[a]$, $[a]K = K[a]$ 。利用 $(|H|, |K|) = 1$ 则 $[a]$ 至少与 $|H|$ 和 $|K|$ 中的一个互素, 不妨设与 $|H|$ 互素, 那么 $[a]H$ 构成 G 的真子群, 与 G 是内 p -群矛盾。所以 $a = 1$ 从而 $N_c(H) \cap N_c(K) = 1$ 。

利用定理 9 显然很容易得到下面的推论。

推论 1 G 是 IP -群, 若 G 中存在互素阶非正规两真子群, 那么 $Z(G) = 1$ 。

定义 3^[9] 所有元素都是素数方幂阶元的群称为 CP -群。

下面是 CP -群与 IP -群之间的关系。

定理 10 除 pq 阶循环群外, IP -群一定是 CP -群。证明 设 G 是 IP -群, 若 G 是 p -群, 则 G 一定是 CP -

群。若 G 不是 p -群, $\forall a \in G, [a] \leq G$, 若 $[a] = G$, 那么 G 是交换群, 根据定理 6 G 一定是 pq 阶循环群, 矛盾。所以 $[a] < G$, 从而 $[a]$ 是 p -群, 所以 G 的任意元素都是素数方幂阶的, 因此 G 是 CP -群。

反过来, CP -群未必是 IP -群, 例如对称群 S_4 [10]。这样就清楚 IP -群与 CP -群间的关系了。现在从真子群阶的角度入手, 来决定群的结构。设 $M(G)$ 表示 G 的真子群的阶的集合, 那么有:

定理 11 若, 则, 且 $G \cong A_6$ 。

证明 显然 G 是内 p -群, 并且 G 有 4 阶的正规子群 P , 并且 P 是初等交换 2-群。所以 G 是 4 阶的初等交换 2-群被 3 阶循环群的扩张, 则 $|G| = 12$ 根据引理 4 12 阶群的构造中, 只有 A_4 为内 p -群, 所以 $G \cong A_4$ 。

3 外 p -群的结构

前面讨论了任一真子群是素数或素数方幂的有限群, 下面讨论满足假设 1 的有限群 G 的结构。

假设 1 设有限群 G 有一个不等于自己的正规子群 N , 包含 N 的 G 的任意真子群所对应的商群都是 p -群。即 $\bar{G} = \frac{G}{N}$ 是 IP -群。

称满足假设 1 的群为外 p -群。

根据引理 3 可解群肯定是外 p -群; 因为 $\left| \frac{S_n}{A_n} \right| = 2$ 所以对称群 S_n 满足假设 1 条件; 显然有限非交换单群不是外 p -群。

定理 12 有限群 G 是外 p -群当且仅当 $G' < G$ 。

证明 设 G, N 满足假设 1 的条件, 由于 $\bar{G} = \frac{G}{N}$ 是内 p -群, 所以 \bar{G} 可解, 所以 $\exists n > 0$ 使得 $\bar{G}^n = \bar{1}$, 即 $G^n \leq N$, 当然必有 $G' < G$ 。反之, 令 $N = G'$, 那么 $\bar{G} = \frac{G}{N}$ 是交换群。设 $\bar{K} < \bar{G}$, 且 $\left| \frac{\bar{G}}{\bar{K}} \right|$ 是素数方幂阶。 K 是在 G 中

对应的群。那么自然有, 且 $\frac{G}{K} \cong \frac{\bar{G}}{\bar{K}}$, 从而 G 和 K 就构成满足假设 1 条件的群。

定理 13 设 G 是有限群, 若 H 是 G 的唯一非素数方幂阶子群, 则 H 是内 p -群, 并且是 G 的极大正规子群。

证明 H 的任一真子群都是 G 的真子群, 利用 H 是 G 的唯一非素数方幂阶子群, 则 H 的任一真子群都是素数方幂阶子群, 而 H 本身不是素数方幂阶子群 [11], 所以 H 是内 p -群。设 $H \leq K \leq G$, 如果 K 是 G 的真子群, 那么 K 也是非素数方幂阶子群, 所以 $H = K$, 利用这点得到 H 是 G 的极大子群。都有 $H^g \leq G$, 并且 $|H^g| = |H|$, 所以 $H^g = H$, 所以 $H \triangleleft G$, 因此 H 是 G 的极大正规子群。

参考文献:

- [1] 刘锐. 有限次单群的结构研究 [D]. 成都: 成都理工大学, 2005
- [2] 徐明曜. 有限群导引 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.
- [3] 张远达. 有限群构造 [M]. 北京: 科学出版社, 1982
- [4] 熊全淹. 近世代数 [M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2004
- [5] Huppert B. Endliche gruppen II [M]. Berlin Heidelberg New York Springer-Verlag 1979.
- [6] Huppert B, Blackburn N. Finite groups III [M]. Berlin Heidelberg New York Springer-Verlag, 1982, 182-194
- [7] Yang W, Zhang Z. Locally soluble finite groups in which every element has prime power order Southeast Asian Bulletin of Mathematics [J]. 2003, 26, 857-864
- [8] Conway JH, Norton SP, Parker R A, et al Atlas of finite groups [M]. Oxford and New York Oxford University Press (Clarendon), 1985
- [9] Gorenstein D. Finite simple groups an introduction to their classification [M]. New York Plenum Press, 1982
- [10] 钱国华. 具有很多素数阶元的有限群 [J]. 数学杂志, 2003, 25(1): 115-118
- [11] 陈重穆. 内 Σ 群 [J]. 数学学报, 1980, 23(2): 239-242

Finite Groups With Many Subgroups of Prime Power Order

ZHANG Kefeng

(Department of Educational Development of Nanhai Neusoft Information, Foshan 528225, China)

Abstract To study the results based on p -groups and inner Σ -groups and their research methods with the methods of reversed proof and analysis proof, the paper first uses the quality and structure of the sub-simple groups to give the quality and structure of the finite groups with many subgroups of prime power order and necessary and sufficient condition. In addition to pointing out the relationship of the finite groups with many subgroups of prime power order, sub-simple groups and CP -groups. At last, the external p -groups and the condition of this groups is given.

Keywords sub-simple groups, p -groups, inner p -groups, IP -groups