

# $\sigma$ -集体正规空间的无限乘积性质

纪广月

(肇庆工商学院工商系, 广东 肇庆 526020)

**摘要:** 证明了如下结果: (1) 如果  $X = \prod_{\tau \in \Sigma} X_\tau$  是  $|\lambda|$ -超仿紧空间, 则  $X$  是  $\sigma$ -集体正规空间当且仅当  $\forall F \in [\Sigma]^{<\omega}, X = \prod_{\tau \in \Sigma} X_\tau$  是  $\sigma$ -集体正规空间。 (2) 设  $X = \prod_{i \in \omega} X_i$  是可数仿紧的, 则下列三条等价:  $X$  是  $\sigma$ -集体正规的;  $\forall F \in [\omega]^{<\omega}, X = \prod_{i \in F} X_i$  是  $\sigma$ -集体正规的;  $\forall n \in \omega \prod_{i \leq n} X_i$  是  $\sigma$ -集体正规的。

**关键词:**  $\sigma$ -集体正规;  $\lambda$ -仿紧;  $\lambda$ -超仿紧; 可数仿紧

**中图分类号:** O 189.11

**文献标识码:** A

在一般拓扑学中, 逆极限、Tychonoff乘积和  $\sigma$ -积是最常见的三种乘积, 文献 [1] 对  $\sigma$ -集体正规空间的逆极限进行了专门讨论, 得到了如下逆极限定理:

设  $X = \lim\left\{X_\tau, \pi_\tau^\tau, \Sigma\right\}$ ,  $|\Sigma| = \lambda$  每个投射  $\pi_\tau$  是开且到上的, 设  $X$  (遗传)  $\lambda$ -仿紧的, 若每个  $X_\tau$  是 (遗传) 正规 (遗传)  $\sigma$ -集体正规的, 则  $X$  是 (遗传)  $\sigma$ -集体正规的。

在逆极限的  $\lambda$ -仿紧性条件适当加强下上面定理中  $X_\tau$  的 (遗传) 正规性条件可以去掉。

因而, 一个自然的问题是:  $\sigma$ -集体正规空间是否有良好的 Tychonoff乘积性质? 本文就此问题进行了研究, 获得了无限个乘积因子的 Tychonoff积的两个等价性定理。

本文所讨论的映射均为连续映射; 设  $A$  是空间  $X$  的子集,  $|A|$  表示  $A$  的基数;  $cA$  和  $\text{Int}A$  分别表示集合  $A$  的闭包和内部;  $[A]^{<\omega} = \{F \subset A: F \text{ 是非空有限集}\}$ ;  $|\Sigma|$  表示无限集合  $\Sigma$  的基数;  $\omega$  表示非负整数, 也表示第一无限序数;  $\exists$  表示存在,  $\forall$  表示任意,  $k$  表示任意基数,  $\Lambda$  为任意指标集。并且假设所涉及的空间都是 Hausdorff 的。

**定义 1** 空间  $x$  称为  $k$ -超仿紧的, 如果  $x$  的每个势  $\leq k$  的开覆盖有一个互外的开加细。

**定义 2**<sup>[4]</sup> 空间  $X$  称为超仿紧的, 如果对每个  $k \in X$

是  $k$ -超仿紧的。

**定义 3**<sup>[5]</sup> 空间  $X$  是  $\sigma$ -集体正规的, 如果对  $x$  的任一离散闭集族  $M = \left\{M_\xi: \xi \in \Sigma\right\}$ , 存在  $X$  的一个  $\sigma$ -互外的开集族  $U = \bigcup_{n \in \omega} U_n$ , 使得  $\forall n \in \omega, U_n = \left\{U_{n, \xi}: \xi \in \Sigma\right\}$  是互外的, 并且  $\forall \xi \in \Sigma, M_\xi \subset \bigcup_{n \in \omega} U_{n, \xi}$ 。

**定义 4** 设  $\langle A, \leq \rangle$  是一个定向集, 称集族  $U = \{U_\alpha, \alpha \in A\}$  是定向上升的, 如果  $\forall \alpha, \beta \in A$ , 若  $\alpha \leq \beta$  则  $U_\alpha \subset U_\beta$ 。

根据定义 1, 显然有下一引理:

**引理 1**  $\sigma$ -集体正规空间的闭子空间是  $\sigma$ -集体正规的。

**引理 2**<sup>[1]</sup> 设  $\lambda$  是一个基数, 如果空间  $x$  是  $\lambda$ -仿紧的,  $\Sigma$  是一个定向集且  $|\Sigma| = \lambda$  若  $H = \left\{H_\tau: \tau \in \Sigma\right\}$  是  $x$  的一个定向上升开覆盖, 则存在一个  $x$  的定向上升开覆盖  $K = \left\{K_\tau: \tau \in \Sigma\right\}$ , 使得  $\tau \in \Sigma, \bar{K}_\tau \subset H_\tau$ 。

**引理 3**<sup>[2]</sup> 空间  $x$  是  $\sigma$ -集体正规的当且仅当对  $X$  内的每个离散闭集族  $M = \left\{M_\xi: \xi \in \Sigma\right\}$ ,  $x$  是  $\sigma$ -互外的开覆盖  $U = \bigcup_{n \in \omega} U_n$ , 每个  $U_n = \left\{U_{n, \xi}: \xi \in \Sigma\right\}$  是互外的,  $\forall n \in \omega, \forall \xi \in \Sigma, U_{n, \xi}$  至多与一个  $M_\xi$  相交。

下面是本文的主要结果及其证明:

定理 1 如果  $X = \prod_{\tau \in \Sigma} X_\tau$  是  $\lambda$ -超仿紧空间, 则  $X$  是  $\sigma$ -集体正规空间当且仅当  $\forall F \in [\sum]^{<\omega}, X = \prod_{\tau \in \Sigma} X_\tau$  是  $\sigma$ -集体正规空间.

证明 ( $\Leftarrow$ )  $F \in [\sum]^{<\omega}$ , 令  $Y_F = \prod_{\tau \in F} X_\tau$  且  $\pi_F: X \rightarrow Y_F$  表投影映射. 特别地, 对于  $\tau \in \Sigma$  令  $\pi_\tau = \pi_{\{\tau\}}$ , 即  $\pi_\tau$  表  $x$  到  $X_\tau$  的投影映射. 并记  $Z_F = Y_{\Sigma - F}$ .

设  $M = \{M_\xi: \xi \in \Sigma\}$  是  $x$  的任一离散闭集族,  $U = \{U_\alpha: \alpha \in \Lambda\}$  是  $x$  的任一开覆盖,  $\forall F \in [\sum]^{<\omega}, \forall \alpha \in \Lambda$ , 令  $U_{F\alpha} = \cup \{V: V \text{ 开于 } Y_F \text{ 并且 } V \times Z_F \subset U_\alpha\}$ , 则

(1)  $U_{F\alpha}$  开于  $Y_F$  且  $U_{F\alpha} \times Z_F \subset U_\alpha$ , 令  $O_F = (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{F\alpha}) \times Z_F$ , 则

(2)  $\{O_F: F \in [\sum]^{<\omega}\}$  是  $X$  的定向上升开覆盖, 即  $\forall F, E \in [\sum]^{<\omega}$ , 若  $F \subset E$ , 则  $O_F \subset O_E$ .

事实上,  $\forall x \in X, \exists \alpha \in \Lambda, x \in U_\alpha, \exists F \in [\sum]^{<\omega}$ , 使得  $\forall \tau \in F, \exists W_\tau$  开于  $X_\tau, x \in \bigcap_{\tau \in F} \pi_\tau^{-1}(W_\tau) \subset U_\alpha$ . 令  $W = \prod_{\tau \in F} W_\tau$  则  $x \in W \times Z_F = \bigcap_{\tau \in F} \pi_\tau^{-1}(W_\tau) \subset U_\alpha$  故  $x \in U_{F\alpha} \times Z_F \subset O_F$ , 即  $\{O_F: F \in [\sum]^{<\omega}\}$  是  $X$  的开覆盖. 其次,  $\forall F, E \in [\sum]^{<\omega}, F \subset E, \forall x \in O_F, \exists \alpha \in \Lambda$  使得  $x \in (x_\tau)_{\tau \in F} \times (x_\tau)_{\tau \in \Sigma - F} \in U_{F\alpha} \times Z_F = (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{F\alpha} \times \prod_{\tau \in E - F} X_\tau) \times Z_E$ .

又,  $U_{F\alpha} \times \prod_{\tau \in \Sigma - F} X_\tau$  开于  $Y_E$ , 故  $x \in U_{E\alpha} \times Z_E \subset O_E$ , 从而 (2) 真.

因  $x$  是  $\lambda$ -超仿紧的, 所以  $x$  是  $\lambda$ -仿紧的, 根据引理 2 存在  $x$  的定向上升开覆盖  $\{G_F: F \in [\sum]^{<\omega}\}$  使得

(3)  $\forall F \in [\sum]^{<\omega}, cIG_F \subset O_F$  且  $\forall F, E \in [\sum]^{<\omega}$ , 若  $F \subset E$  则  $G_F \subset G_E, \forall F \in [\sum]^{<\omega}$ , 令  $T_F = Y_F - \pi_F(X - cIG_F)$ , 则

(4)  $T_F \subset \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{F\alpha}$

事实上,  $\forall x \in T_F, x \notin \pi_F(X - cIG_F)$ , 则有  $\pi_F^{-1}(x) \cap (X - cIG_F) = \emptyset$ . 故  $\pi_F^{-1}(x) \subset cIG_F \subset O_F, x \in (\bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{F\alpha}) \times Z_F$ , 从而  $x \in \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_{F\alpha}$ .

$\forall F \in [\sum]^{<\omega}$ , 令  $C_F = (Int T_F) \times Z_F$ , 现证明:

(5)  $\{C_F: \forall F \in [\sum]^{<\omega}\}$  是  $x$  的开覆盖.

因  $\forall x \in X, \exists F \in [\sum]^{<\omega}$  使得  $x \in G_F, \exists E \in [\sum]^{<\omega}$ , 使得  $\forall \tau \in E$ , 有  $W_\tau$  开于  $X_\tau$  并且  $x \in \bigcap_{\tau \in E} \pi_\tau^{-1}(W_\tau) \subset G_F$ , 令  $W = \prod_{\tau \in E} W_\tau$  则  $x \in \bigcap_{\tau \in E} \pi_\tau^{-1}(W_\tau) =$

$\pi_E^{-1}(W) \subset G_F$ , 取  $H = E \cup F$ , 故  $\pi_E^{-1}(W) \subset T_H \times Z_H$ . 事实上, 若  $y = (y_\tau)_{\tau \in \Sigma} \in \pi_E^{-1}(W) - T_H \times Z_H$  则

$(y_\tau)_{\tau \in H} \notin T_H = Y_H - \pi_H(X - cIG_H)$ , 存在  $z \in X - cIG_H$ , 使得  $\pi_H(z) = (y_\tau)_{\tau \in H}$ , 因  $E \subset H$ , 则  $P_E(z) = P_E \circ P_H(z) = P_E((yS)S_H) = (yS)S_H \cap W$ , 故  $z \in P_E^{-1}(W) \subset G_F \subset G_H$ , 这与  $z \in X - cIG_H$  矛盾. 从而,  $P_E^{-1}(W) \subset T_H @ Z_H$ , 故  $P_E^{-1}(W) \subset Int(T_H @ Z_H) \subset Int(T_H) @ Z_H = G_H$ , 即 (5) 真.

因为  $x$  是  $K_2$ 超仿紧的, 由定义 1 故对势  $[K]$  的  $x$  的开覆盖  $L = \{C_F: F \in [\sum]^{<X}\}$  有一个互外的开加细  $D = \{D_F: F \in [\sum]^{<X}\}$ , 使得  $PFI[\sum]^{<X}, D_F \subset C_F$ , 对  $PFI[\sum]^{<X}$ , 令  $T_F = \{T_{F_H} \overline{P_F[M_N]}: N \geq 2\}$ , 则  $T_F$  是  $T_F$  的离散闭集族.

事实上, 令  $y \in T_F$ , 由于  $T_F \subset G_{U_{F\alpha}}$  并且存在  $y$  的开邻域  $V$  使得  $P_F^{-1}[V] \cap H M_N X <$  至多对一个  $N \geq 2$  成立, 且  $P_F[P_F^{-1}[V] \cap H M_N X] = V \cap P_F[M_N]$ , 又因  $V$  开于  $Y_F$ , 所以  $V \cap P_F[M_N] X <$  至多对一个  $N \geq 2$  成立. 所以  $T_F$  是  $T_F$  的离散闭集族.

因  $T_F$  闭于  $Y_F$  容易证明  $T_F$  是  $Y_F$  内的离散闭集族.

(6) 由于  $Y_F$  是  $R_2$ 集体正规的, 从而  $Y_F$  有一个  $R_2$ 互外的开覆盖  $V^S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n^S$ , 使得每个  $V_n^S = \{V_{n,N}^S: N \geq 2\}$  是互外的, 且对  $PNI X PNI 2, V_{n,N}^S$  至多与一个  $T_{F_H} \overline{P_F[M_N]}$  相交.

(7) 由于对  $PNI X PNI 2, V_n^S$  是  $Y_F$  的互外开集族, 且  $P_F: X \rightarrow Y_F$  连续, 容易证明:  $\{P_F^{-1}[V_{n,N}^S], NI \geq 2\}$  是  $x$  的互外开集族.

又由于  $D$  是  $x$  的互外开集族, 从而  $H_n = \{D_{F_H} \overline{P_F^{-1}[V_{n,N}^S]}: SI \geq 1, NI \geq 2, F \in [\sum]^{<X}\}$  是  $X$  的互外开集族.

事实上, 对  $P(SN), (CG)I \geq 2$ , 若  $(SN)X (CG)$ , 必有  $D_{F_H} \overline{P_F^{-1}[V_{n,N}^S]} \cap (D_{F_H} \overline{P_F^{-1}[V_{n,C}^S]}) = \emptyset$ , 否则将与  $D$  或  $V_n^S$  为  $x$  或  $Y_F$  的互外开集族相矛盾.

令  $H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} H_n$

(8) 则  $H$  为  $x$  的一个  $R$ -互外的开覆盖.

事实上, 只须证明  $H$  覆盖  $x$  即可. 对  $PxI X, v \in S I \geq 1$ , 使得  $x \in D_F \subset C_F \subset P_F^{-1}[T_F]$ , 从而  $P_{F_I} T_F$ . 而  $V^S$  也是  $T_F$  的一个  $R$ -互外的开覆盖, 故  $v \in NI X, v \in NI 2$ , 使得  $P_{F_I} V_n^S$  从而  $x \in P_F^{-1}[V_{n,N}^S]$ , 于是得到  $x \in D_{F_H} \overline{P_F^{-1}[V_{n,N}^S]} \subset H_n \subset H$ , 所以  $H$  是  $x$  的一个覆盖, 从而是  $X$  的一个  $R$ -互外的开覆盖.

(10) 对  $PSI \geq 1, PNI X PNI 2, PFI[\sum]^{<X}, D_{F_H} \overline{P_F^{-1}[V_{n,N}^S]}$  至多与一个  $M_N I M$  相交.

由于对  $P V_{n,N}^S, V_n^S, V_{n,N}^S$  至多与一个  $T_{F_H} \overline{P_F[M_N]}$

相交,故知  $P_F^{-1}[V_{n,N}^S]$  至多与一个  $P_F^{-1}[T_F \cup \overline{P_F[M,N]}]$  相交,从而  $D_F \cup P_F^{-1}[V_{n,N}^S]$  至多与一个  $P_F^{-1}[T_F \cup \overline{P_F[M,N]}]$  相交。

另一方面,  $P_F^{-1}[T_F \cup \overline{P_F[M,N]}] < P_F^{-1}[T_F] < P_F^{-1}[U_{FA}]$  至多与一个  $M_N$  相交,故知  $D_F \cup P_F^{-1}[V_{n,N}^S]$  至多与一个  $M_N$  相交。根据引理 3 知,  $X$  是  $R$ -集体正规的。

( ) 设  $X = \prod_{E} X_S$  是  $R$ -集体正规空间,  $PFI [2]^{<X}$ ,  $PSI 2\mathcal{F}$ , 取  $xSI X_S$  则由引理 1  $x$  的闭子空间  $Y22 = \prod_{E} X_S @ \{ \{X_S\}: SI 2\mathcal{F} \}$  是  $R$ -集体正规的。从而,  $\prod_{E} X_S$  是  $R$ -集体正规的。

定理 2 如果  $X = \prod_{i \in X} X_i$  是可数仿紧的,则下列三条等价:

- (1)  $X$  是  $R2$ 集体正规的;
- (2)  $PFI [X]^{<X}$ ,  $X = \prod_{i \in X} X_i$  是  $R2$ 集体正规的;
- (3)  $PnI X, \prod_{i \in X} X_i$  是  $R2$ 集体正规的。

证明: (1)和(2)的等价性是上一定理的直接推论;

(2) ] (3)是显然的,现在只需证明(3) ] (2)。

事实上,  $PFI [2]^{<X}$ , 因为  $F X <$ , 故可记  $m = \max F$ 。由(3),  $\prod_{i \in m} X_i$  是  $R2$ 集体正规的。 $P i [ m$ , 如果  $i \in F$ , 则取一个  $x_i \in X_i$ , 则  $\prod_{i \in F} X_i @ \{ \{x_i\}: i \in I \setminus \{0, 1, \dots, m\} - F \}$  是闭于  $\prod_{i \in m} X_i$  的并且与  $\prod_{i \in F} X_i$  同胚。故  $\prod_{i \in F} X_i$  是  $R2$ 集体正规的。

参考文献:

- [ 1 ] Chiba K. Normality of Inverse Limits [ J ]. Math. Japonica 1990, ( 35 ) 5 959
- [ 2 ] 戴保华. 关于  $R2$ 积的性质 [ J ]. 四川大学学报, 1994 ( 2 ): 163
- [ 3 ] 熊朝晖.  $R2$ 集体正规空间的逆极限 [ J ]. 首都师范大学学报: 自然科学版. 1999, 20 ( 4 ): 8
- [ 4 ] Rudin M E. K2Dowker spaces [ J ]. London MATH. SOC. Lecture notes ser 1985 ( 93 ): 175
- [ 5 ] 刘应明.  $R2$ 集体正规与集体正规 [ J ]. 四川大学学报, 1978 ( 1 ): 11.

### Infinite Product Property of $R2$ collectionwise Normal Spaces

Ji Guangyue

(Dept. of Industry and Commerce, Zhaoqing College of Industry and Commerce, Zhaoqing 526020, China)

**Abstract** The following are proved (1) Let  $X = \prod_{E} X_S$  be  $|K|2$  superparacompact then  $X$  is  $R2$  collectionwise normal spaces if only every  $PFI [ E ]^{<X}$ , then  $X = \prod_{E} X_S$  is  $R2$  collectionwise normal spaces (2) Let  $X = \prod_{i \in X} X_i$  be countable paracompact, then the following are equivalent  $X$  is  $R2$  collectionwise normal for every  $PFI [ X ]^{<X}$ ,  $X = \prod_{i \in X} X_i$  is  $R2$  collectionwise normal; for every  $nI X, \prod_{i \in X} X_i$  is  $R2$  collectionwise normal

**Key words**  $R2$  collective normal  $K2$  paracompact  $K2$  over paracompact countably paracompact

(上接第 153 页)

### New Upper Bound on the Spectral Radius of the Hadamard Product of Nonnegative Matrices

LIU Xin, YANG Xiaozhong

(School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

**Abstract** Nonnegative matrix is a type of special matrix which has been widely used in numerical graph, linear programming, computer science and automation and so on. The spectral radius problem of the Hadamard product of two nonnegative matrices is an important problem in the theory of nonnegative matrix. For the Hadamard product  $A \cdot B$  of nonnegative matrices  $A$  and  $B$ , we give new upper bound for the spectral radius of  $A \cdot B$ . The new bound improves the results of [ 1 ], [ 2 ] and [ 3 ].

**Key words** nonnegative matrix Hadamard product spectral radius upper bound diagonally dominant