

关于 Diophantine 方程 $x^3 \pm 8 = 3Dy^2$

韩云娜, 赵春花

(西北大学数学系, 西安 710127)

摘要: 利用初等数论的方法证明了: 如果 D 是适合 $D \equiv 5 \pmod{8}$ 的奇素数, 则方程 $x^3 + 8 = 3Dy^2$ 无正整数解; 如果 D 是适合 $D \equiv 7 \pmod{8}$ 的奇素数, 则方程 $x^3 - 8 = 3Dy^2$ 无正整数解。

关键词: Diophantine 方程; 正整数解; 奇素数; 同余

中图分类号: O 156. 1

文献标识码: A

引言

设 N 是全体正整数的集合, D 是无平方因子正奇数, 方程

$$x^3 \pm 8 = 3Dy^2, x, y \in N, \gcd(x, y) = 1 \quad (1)$$

是一类基本而又重要的三次方程。1980 年, 柯召、孙琦证明了: 当 $D \not\equiv 11, 19 \pmod{20}$ 时, 方程 $x^3 + 8 = 3Dy^2$ 无非平凡整数解; 当 $D \not\equiv 1, 9 \pmod{20}$ 时, 方程 $x^3 - 8 = 3Dy^2$ 无非平凡整数解。1991 年, 曹玉书给出了方程 (1) 无非平凡整数解的一些充分条件。乐茂华证明了 $D \equiv 5 \pmod{6}$ 则方程 $x^3 + 8 = 3Dy^2$ 没有适合 $\gcd(x, y) = 1$ 的正整数解。2009 年梁艳华和李鑫证明了方程 $x^3 + 8 = Dy^2$ 中 $D = 79$ 时仅有整数解 $(x, y) = (-2, 0)$, (586 ± 1596) 。本文证明了以下一般性的结果。

1 主要定理

定理 1 设 D 是奇素数, 如果

$$D = 3(8k + 3)(8k + 4) + 1$$

$$\text{或 } D = 3(8k + 4)(8k + 5) + 1$$

其中 k 是非负整数, 则方程

$$x^3 + 8 = 3Dy^2, x, y \in \mathbb{N}, \gcd(x, y) = 1 \quad (2)$$

无正整数解。

定理 2 设 D 是奇素数, 如果

$$D = 3(8k + 1)(8k + 2) + 1$$

$$\text{或 } D = 3(8k + 6)(8k + 7) + 1$$

其中 k 是非负整数, 则方程

$$x^3 - 8 = 3Dy^2, x, y \in \mathbb{N}, \gcd(x, y) = 1 \quad (3)$$

无正整数解。

2 定理的证明

定理 1 的证明

设 (x, y) 是方程 (2) 的解, 由 (2) 知 x 与 y 均为奇数, 因为 $\gcd(x + 2, x^2 - 2x + 4) = 3$ 所以 (2) 式可分解为以下两种情形

情形 I:

$$x + 2 = 9a^2, x^2 - 2x + 4 = 3Db^2 \quad (4)$$

其中 $y = 3ab, \gcd(x, y) = 1$ 。

情形 II:

$$x + 2 = 9Da^2, x^2 - 2x + 4 = 3b^2 \quad (5)$$

其中 $y = 3ab$ 且 $\gcd(x, y) = 1$ 。

以下分别讨论情形 I 和情形 II。

情形 I: 由 (4) 式可得

$$3(3a^2 - 1)^2 + 1 = Db^2 \quad (6)$$

于是由 (6) 式知

$$DX^2 - 3Y^2 = 1, X, Y \in \mathbb{N} \quad (7)$$

有解 $(X, Y) = (b, 3a^2 - 1)$ 。

当 $D = 3(8k + 3)(8k + 4) + 1$ 时, $(2, 16k + 7)$ 是方程 (7) 的最小正整数解。否则, 令 $(1, y)$ 是方程 (7)

的最小正整数解, 则有 $y^2 = \frac{D-1}{3} = (8k+3)(8k+4)$,

因为 $\gcd(8k+3, 8k+4) = 1$ 所以存在 $y_1, y_2 > 0$ 使得 $8k+3 = y_1^2, 8k+4 = y_2^2$ 从而 $y_2^2 - y_1^2 = 1$ 这是不可能

的, 故 $(1, y)$ 不是方程 (7) 的最小正整数解。因此 $(2, 16k + 7)$ 是方程 (7) 的最小正整数解。根据文献 [6] 中的结果, 从 (7) 式可得

$$b\sqrt{D} + (3a^2 - 1)\sqrt{3} = (2\sqrt{D} + (16k + 7)\sqrt{3})^t \quad (8)$$

其中 $t \nmid 2$

由 (8) 式知 $b \equiv 0 \pmod{2}$, 再由 (6) 式知 $a \equiv 0 \pmod{2}$, 这与 $\gcd(x, y) = 1$ 矛盾。故 (6) 式无正整数解。当 $D = 3(8k + 4)(8k + 5) + 1$ 时, 类似可证 (6) 式无正整数解。

情形 II: 由 (5) 式得

$$3(3Da^2 - 1)^2 + 1 = b^2 \quad (9)$$

因为 b 是奇数, 则 $b^2 \equiv 1 \pmod{8}$, 故从 (9) 式可得 $3Da^2 - 1 \equiv 0 \pmod{4}$, 而 $D \equiv 1 \pmod{8}$, 即 $D \equiv 1 \pmod{4}$, 于是 $0 \equiv 3Da^2 - 1 \equiv 2 \pmod{4}$ 矛盾, 故 (9) 式无正整数解。

综合以上两种情形, 定理 1 得证。

定理 2 的证明

设 (x, y) 是方程 (3) 的解, 由 (3) 知 x 与 y 均为奇数。因 $\gcd(x - 2x^2 + 2x + 4) = 3$ 故方程 (3) 可分解为以下两种情形:

情形 I :

$$x - 2 = 9Da^2, x^2 + 2x + 4 = 3b^2 \quad (10)$$

其中 $y = 3ab, \gcd(x, y) = 1$ 。

情形 II:

$$x - 2 = 9a^2, x^2 + 2x + 4 = 3Db^2 \quad (11)$$

其中 $y = 3ab, \gcd(x, y) = 1$ 。

以下分别讨论情形 I 和情形 II

情形 I : (10) 式可整理为

$$3(3Da^2 + 1)^2 + 1 = b^2 \quad (12)$$

因为 $b^2 \equiv 1 \pmod{8}$, 由 (12) 得

$$(3Da^2 + 1)^2 \equiv 0 \pmod{8}, \text{ 而 } D \equiv 3 \pmod{8},$$

即 $0 \equiv (3Da^2 + 1)^2 \equiv 4 \pmod{8}$, 这不可能。

于是 (10) 无正整数解。

情形 II: (11) 式可整理为

$$3(3a^2 + 1)^2 + 1 = Db^2 \quad (13)$$

于是由 (13) 式知

$$DX^2 - 3Y^2 = 1 \quad (14)$$

有解 $(X, Y) = (b, 3a^2 + 1)$ 。

当 $D = 3(8k + 1)(8k + 2) + 1$ 时, $(2, 16k + 3)$ 是方程 (14) 的最小正整数解, 根据文献 [6], 由 (14) 式可得

$$b\sqrt{D} + (3a^2 + 1)\sqrt{3} = (2\sqrt{D} + (16k + 3)\sqrt{3})^t \quad (15)$$

其中 $t \nmid 2$ 于是由 (15) 式知 $b \equiv 0 \pmod{2}$, 再由 (13) 式知 $a \equiv 0 \pmod{2}$ 这与 $\gcd(x, y) = 1$ 矛盾。

当 $D = 3(8k + 6)(8k + 7) + 1$ 时, 类似可证 (13) 式无解。

综上 2 种情形的结果, 定理 2 得证。

参考文献:

[1] 柯 召, 孙 琦. 关于丢番图方程 $x^3 \pm 8 = Dy^2$ [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 1981, (2): 1-5
 [2] 柯 召, 孙 琦. 关于丢番图方程 $x^3 \pm 8 = 3Dy^2$ [J]. 四川大学学报: 自然科学版, 1981, (4): 1-5.
 [3] 曹玉书. 关于丢番图方程 $x^3 \pm 8 = 3Dy^2$ [J]. 黑龙江大学学报: 自然科学版, 1991, (1): 18-21
 [4] 乐茂华. 关于 Diophantine 方程 $x^3 + 8 = 3Dy^2$ [J]. 太原师专学报: 自然科学版, 2004, (3): 6-8.
 [5] 梁艳华, 李 鑫. 关于不定方程 $x^3 + 8 = Dy^2$ [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2009, 22(1): 26-29
 [6] Walker D T. On the Diophantine equation $mx^2 - ny^2 = \pm 1$ [J]. Amer Math Monthly 1967(74): 504-513

On the Diophantine Equation $x^3 \pm 8 = 3Dy^2$

HAN Yun-na, ZHAO Chun-hua

(Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China)

Abstract It is proved that if D is an odd prime with $D \equiv 5 \pmod{8}$, the equation $x^3 + 8 = 3Dy^2$ has no positive integer solutions. And if D is an odd prime with $D \equiv 7 \pmod{8}$, the equation $x^3 - 8 = 3Dy^2$ has no positive integer solutions.

Key words Diophantine equation; positive integer solution; odd prime; congruence