文章编号: 1673-1549(2010)02-0152-03

非负矩阵的 Hadamard积谱半径上界的估计

刘 新, 杨晓英

(云南大学数学与统计学院, 昆明 650091)

摘 要: 非负矩阵是一类特殊矩阵, 广泛地应用于数值计算、图论、线性规划、计算机科学、自动控制等领域。两个非负矩阵的 Hadamard积的谱半径问题是非负矩阵理论中一个重要问题。关于两个非负矩阵的 Hadamard积 $A\circ B$, 我们给出 $A\circ B$ 谱半径的新上界, 这一上界改进了文献[1]、文献[2]和文献[3]中的结果。

关键词: 非负矩阵; Hadamard积; 谱半径; 上界; 对角占优

中图分类号: O151.21 文献标识码: A

引 言

N表示集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$。$R^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶实矩阵。$C^{m\times n}$ 表示 $m\times n$ 阶复矩阵。$\rho(P)$ 表示 $n\times n$ 阶矩阵 P 的谱半径。

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, 如果 $a_{ij}\geqslant 0$, $i, j=1, 2, \cdots, n$, 即矩阵 A 的所有元素是非负的, 则称 A 是非负矩阵, 记作 $A\geqslant 0$。如果 $A>0$, 则称 A 是正矩阵。

设 $A=(a_{ij})\in R^{n\times n}$, 若 A 满足 $|a_{ii}|\geqslant\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ $(i\in N)$, 则称 A 为行对角占优, 类似地, 可以定义列对角占优。若上述不等式为严格不等号, 即 $|a_{ii}|>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|$ $(i\in N)$, 则称 A 为严格行对角占优,类似可以定义严格列对角占优。

设 $A=(a_{ij})\in C^{m\times n}$, $B=(b_{ij})\in C^{m\times n}$, 用 $A\circ B$ 表示 A 和 B 的对应元素相乘而成的 $m\times n$ 阶矩阵, 即

$$A\circ B=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & a_{1n}b_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{m1}b_{m1} & \cdots & a_{mn}b_{mn}\end{pmatrix}$$

$A\circ B$ 称为 A 和 B 的 Hadamard积。

如果 A 和 B 都是非负矩阵, 则 $A\circ B$ 也是非负矩阵[4]。

在文献[5]中首先给出 $A\circ B$ 的谱半径上界的估计式: $\rho(A\circ B)\leqslant\rho(A)\rho(B)$。

2008年, Huang Rong在文献[1]给出下面的上界估计式:

$$\rho(A\circ B)\leqslant(1+\rho(J'_A)\rho(J'_B))\max_{1\leqslant i\leqslant n}a_{ii}b_{ii}$$

2007年, Fang Maozhong 在文献[2]给出了如下结果:

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{2a_{ii}b_{ii}+\rho(A)\rho(B)-a_{ii}\rho(B)-b_{ii}\rho(A)\}。$$

2009年, Liu Qingping等在文献[3]中得出下面的结论:

$$\rho(A\circ B)\leqslant\max_{i\neq j}\frac{1}{2}\{a_{ii}b_{ii}+a_{jj}b_{jj}+[(a_{ii}b_{ii}-a_{jj}b_{jj})^2+4(\rho(A)-a_{ii})(\rho(B)-b_{ii})(\rho(A)-a_{jj})(\rho(B)-b_{jj})]^{\frac{1}{2}}\}$$

上述估计式都与矩阵的谱半径有关系, 难于计算。本文将给出 $A\circ B$ 的谱半径新的上界估计式, 新上界仅与矩阵的元素有关,并且改进了文献[1], 文献[2]和文献[3]中的相应的结果。

首先, 我们给出一些记号, 它们会在后面的讨论中用到。记:

$$c_{il}=\frac{|a_{il}|}{|a_{ll}|-\sum_{k\neq l, i}|a_{kl}|}, \ l\neq i;$$

$$c_i=\max_{l\neq i}\{c_{il}\}, \ i\in N;$$

$$s_{ji}=|a_{ji}|h_j, \ h_j=\begin{cases}c_j, & c_j\neq 0\\ 1, & c_j=0\end{cases},$$

收稿日期: 2009-12-30

作者简介: 刘 新(1983-), 男, 山东济宁人, 硕士生, 主要从事矩阵理论方面的研究。

$s_i = \max_{j \neq i} \{ s_{ji} \}$, $i, j \in N$。

引理 1.1[6] 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 是任意复矩阵, x_1, x_2, …, x_n 是正实数。则 A的所有特征值都位于下列区域之中

$$\bigcup \left\{ z \in C: | z - a_{ii} | \leqslant x_i \sum_{j \neq i} \frac{1}{x_j} | a_{ji} |, \ i \in \mathbf{N} \right\}。$$

引理 1.2[7] 设 $A = (a_{ij}) \in \mathbf{R}^{n \times n}$ 是非负矩阵, 则 A 是不可约矩阵, 或者存在置换矩阵 P, 使得

$$P^T A P = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1k} \\ & A_{22} & \cdots & A_{2k} \\ & & \cdots & \cdots \\ & & & A_{kk} \end{bmatrix} \qquad (2.1)$$

其中 A_{ii} ($i = 1, 2, \cdots, k$)是不可约的。

引理 1.3[7] 式子 (2.1)称为不可约一般形式。注意 $\sigma(A) = \bigcup_{i=1}^{k} \sigma(A_{ii})$, $\rho(A) = \max\{\rho(A_{ii}), i = 1, 2, \cdots, k\}$。

1 主要结果

定理 2 设 $A = (a_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是列对角占优非负矩阵, $B = (b_{ij}) \in R^{n \times n}$ 是非负矩阵。则

$$\rho(A \circ B) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ a_{ii} b_{ii} + s_i \sum_{j \neq i} \frac{b_{ji}}{h_j} \right\}$$

证明 令 $C = A \circ B$。

若 C 是不可约矩阵, 则 A, B 也是不可约的。那么

$s_{ji} > 0$, $s_i = \max_{j \neq i} \{ s_{ji} \} > 0$, $i, j \in \mathbf{N}$。

设 $\lambda = \rho(C)$, 由引理 1.1知, 存在 $i_0 (1 \leqslant i_0 \leqslant n)$, 使得

$$| \lambda - a_{i_0 i_0} b_{i_0 i_0} | \leqslant s_{i_0} \sum_{j \neq i_0} \frac{1}{s_j} a_{j i_0} b_{j i_0}$$

$$\lambda \leqslant a_{i_0 i_0} b_{i_0 i_0} + s_{i_0} \sum_{j \neq i_0} \frac{1}{s_j} a_{j i_0} b_{j i_0}$$

$$\leqslant a_{i_0 i_0} b_{i_0 i_0} + s_{i_0} \sum_{j \neq i_0} \frac{1}{a_{j i_0} h_j} a_{j i_0} b_{j i_0}$$

$$= a_{i_0 i_0} b_{i_0 i_0} + s_{i_0} \sum_{j \neq i_0} \frac{b_{j i_0}}{h_j}$$

$$\leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ a_{ii} b_{ii} + s_i \sum_{j \neq i} \frac{b_{ji}}{h_j} \right\}$$

若 C 是可约矩阵。不失一般性, 我们假设 C是具有不可约对角块 $C_{ii} = A_{ii} \circ B_{ii}$ ($i = 1, 2, \cdots, k$)的块上三角矩阵。由引理 1.3知, $\rho(A \circ B) = \max_{1 \leqslant i \leqslant k} \rho(A_{ii} \circ B_{ii})$。结论仍成立。

下面我们通过例子验证上面的结果。

2 例 子

例: 设

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

如果应用文献 [5]中的结果, 得

$\rho(A \circ B) \leqslant \rho(A)\rho(B) = 50.1274$。

由文献 [1]中定理 6, 可得

$$\rho(A \circ B) \leqslant (1 + \rho(J'_A)\rho(J'_B)) \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{ii} b_{ii} = 39.7468。$$

由文献 [2]中定理 4, 得

$$\rho(A \circ B) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{ 2a_{ii} b_{ii} + \rho(A)\rho(B) - a_{ii}\rho(B) - b_{ii}\rho(A) \} = 25.5364。$$

由文献 [3]中定理 4, 得

$\rho(A \circ B) \leqslant 24.3892$。

如果应用定理 2, 们可以得到

$$\rho(A \circ B) \leqslant \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ a_{ii} b_{ii} + s_i \sum_{j \neq i} \frac{b_{ji}}{h_j} \right\} = 23。$$

而 $\rho(A \circ B)$ 的真值为:

$\rho(A \circ B) = 20.7439$。

注: 通过例子, 较定理 2的结果与其他相应的结果, 以发现定理 2提高了 $\rho(A \circ B)$ 的上界。

参 考 文 献:

[1] Huang R. Some inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl 2008, 428: 1551-1559.

[2] Fang M Z. Bounds on eigenvalues of the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2007, 425: 7-15.

[3] Liu Q B, Chen G L. On two inequalities for the Hadamard product and the Fan product of matrices[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431: 974-984.

[4] 陈景良, 陈向晖, 特殊矩阵 [M]. 北京: 清华大学出版社, 2000.

[5] Horn R A, Johnson C R. Matrix Analysis[M]. UK: Cambridge University, 1985.

[6] Varga R S. Minimal Gerschgorin sets[J]. Pacific J Math 1965, 15(2): 719-729.

[7] Berman A, Plemmons R J. Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences[M]. New York: Academic Press, 1979.

(下转第 160页)

相交,故知 $\pi_F^{-1}[V_{n,\xi}^{\tau}]$ 至多与一个 $\pi_F^{-1}[T_F \cap \overline{\pi_F[M_\xi]}]$ 相交,从而 $D_F \cap \pi_F^{-1}[V_{n,\xi}^{\tau}]$ 至多与一个 $\pi_F^{-1}[T_F \cap \overline{\pi_F[M_\xi]}]$ 相交。

另一方面, $\pi_F^{-1}[T_F \cap \overline{\pi_F[M_\xi]}] \subset \pi_F^{-1}[T_F] \subset \pi_F^{-1}[U_{F\alpha}]$ 至多与一个 M_ξ 相交,故知 $D_F \cap \pi_F^{-1}[V_{n,\xi}^{\tau}]$ 至多与一个 M_ξ 相交。根据引理 3知, x是 σ – 集体正规的。

(⇒)设 $X = \prod_{\tau\in\Sigma} X_\tau$ 是 σ – 集体正规空间, $\forall F \in [\Sigma]^{<\omega}$, $\forall \tau \in \Sigma - F$, 取 $x_\tau \in X_\tau$, 则由引理 1, x的闭子空间 $Y_{\Sigma-F} = \prod_{\tau\in\Sigma} X_\tau \times \{\{X_\tau\}: \tau \in \Sigma - F\}$ 是 σ – 集体正规的。从而, $\prod_{\tau\in\Sigma} X_\tau$ 是 σ – 集体正规的。

定理 2 如果 $X = \prod_{i\in\omega} X_i$ 是可数仿紧的,则下列三条等价:

(1) X 是 σ-集体正规的;

(2) $\forall F \in [\omega]^{<\omega}$, $X = \prod_{i\in F} X_i$ 是 σ-集体正规的;

(3) $\forall n \in \omega$, $\prod_{i\leqslant n} X_i$ 是 σ-集体正规的。

证明: (1)和(2)的等价性是上一定理的直接推论; (2) ⇒ (3)是显然的,现在只需证明(3) ⇒ (2)。

事实上, $\forall F \in [\Sigma]^{<\omega}$,因为 $F \neq \phi$,故可记 $m = \max F$。由(3), $\prod_{i\leqslant m} X_i$ 是 σ-集体正规的。$\forall i \leqslant m$, 如果 $i \notin F$, 则取一个 $x_i \in X_i$, 则 $\prod_{i\in F} X_i \times \prod \{\{x_i\}: i \in \{0, 1, \ldots, m\} - F\}$ 是闭于 $\prod_{i\leqslant m} X_i$ 的并且与 $\prod_{i\in F} X_i$ 同胚。故 $\prod_{i\in F} X_i$ 是 σ-集体正规的。

参 考 文 献:

[1] Chiba K. Normality of Inverse Limits[J]. Math, Japonica, 1990, (35) 5: 959.

[2] 戴保华. 关于 σ-积的性质[J]. 四川大学学报, 1994(2): 163.

[3] 熊朝晖. σ-集体正规空间的逆极限[J]. 首都师范大学学报: 自然科学版. 1999, 20(4): 8.

[4] Rudin M E. K-Dowker spaces[J]. London, MATH. SOC. Lecture notes ser, 1985, (93): 175.

[5] 刘应明. σ-集体正规与集体正规[J]. 四川大学学报, 1978, (1): 11.

Infinite Prdouct Property of σ- collectionwise Normal Spaces

JI Guang-yue

(Dept of Industry and Commerce, Zhaoqing College of Industry and Commerce, Zhaoqing 526020, China)

Abstract The following are proved: (1) Let $X = \prod_{\tau\in\Sigma} X_\tau$ be $|\lambda|$- superparacompact, then X is σ- collectionwise normal spaces if only every $F \in [\sum]^{<\omega}$, then $X = \prod_{\tau\in\Sigma} X_\tau$ is σ- collectionwise normal spaces. (2) Let $X = \prod_{i\in\omega} X_i$ be countable paracompact, then the following are equivalent: X is σ- collectionwise normal; for every $F \in [\omega]^{<\omega}$, $X = \prod_{i\in F} X_i$ is σ- collectionwise normal; for every $n \in \omega$, $\prod_{i\leqslant n} X_i$ is σ- collectionwise normal.

Key words σ- collective normal; λ- paracompact; λ- over paracompact; countably paracompact

(上接第 153页)

New Upper Bound on the Spectral Radius of the Hadamard Product of Nonnegative Matrices

LIU Xin, YANG Xiao-ying

(School of Mathematics and Statistics, Yunnan University, Kunming 650091, China)

Abstract Nonnegative matrix is a type of special matrix, which has been widely used in numerical, graph, linear programming, computer science and automation and so on. The spectral radius problem of the Hadamard product of two nonnegative matrices is an important problem in the theory of nonnegative matrix. For the Hadamard product $A \circ B$ of nonnegative matrices A and B, we give new upper bound for the spectral radius of $A \circ B$. The new bound improves the results of [1], [2] and [3].

Key words nonnegative matrix; Hadamard product; spectral radius; upper bound; diagonally dominant