第 23卷第 2期 四川理工学院学报(自然科学版) Vol.23 No.2
2010年 4月 Journal of Sichuan University of Science & Engineering(Natural Science Edition) Apr. 2010
文章编号: 1673-1549(2010)02-0154-02

光滑函数芽的通用形变

陈庆娥[1], 朱恩超[2], 施恩伟[3]

(1.天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001; 2.天水市气象局, 甘肃 天水 741000;
3.云南师范大学数学学院, 昆明 650092)

摘 要: 文章证明了光滑函数芽的无穷小形变的存在性, 进而得到通用形变的存在性, 并得到了求通用形变的方法。

关键词: 光滑函数芽; 通用形变; 无穷小形变
中图分类号: O19 文献标识码: A

1 基本概念与记号

光滑函数芽是奇点理论研究的数学对象, 奇点理论在分歧理论和突变理论中有都有着重要的应用. 光滑函数芽的性质在奇点理论中起着重要作用, 光滑函数芽的通用形变和无穷小形变的性质是奇点理论的重要内容之一, 为后面研究开折理论打下基础, 文献[1-2]介绍了它们的一些概念, 本文证明了光滑函数芽的无穷小形变的存在性, 进而得到通用形变的存在性, 也给出了求通用形变的方法。

文中未解释的概念参考文献[1-2]。

定义 1[1] 设 $f: (R^m, 0) \to (R, 0)$ 是光滑函数芽, $x = 0 \in R^m$ 是 f 的临界点, 如果 $F: (R^m \times R^l, 0) \to (R, 0)$ 满足条件 $F(x, 0) = f(x)$, 则称 f 是一个以 R^l 为基的形变。

注 1: f 的形变一定存在, 例如 $F(x) = f(x) + \|\lambda\|$ 是 f 的一个形变, 且知 f 的形变不唯一。

定义 2[2] 设 $F: (R^m \times R^k, 0) \to (R, 0)$ 及 $F: (R^m \times R^l, 0) \to (R, 0)$ 是 $f: (R^m, 0) \to R$ 的两个形变, 若存在光滑映射 $\phi: R^l \to R^k$ 满足 $G(x, \lambda) = F(x, \phi(\lambda))$, $\lambda \in R^l$, $\phi(\lambda) \in R^k$ 则称 G 是 F 的导出形变, 即 G 是从 F 诱导出来的.

定义 3 设 $F_1, F_2: (R^m \times R^k, 0) \to (R, 0)$ 是光滑函数芽 $f: (R^m, 0) \to (R, 0)$ 两个形变, 若存在 $g \in G^0$, 其中 $G^0 = \{g \mid g: (R^m \times R^l, 0) \to (R^m, 0), g(x, 0) = x\}$, 满足 $F_1(x, a) = F_2(x, a)$, 则称 F_1 和 F_2 是等价的。

定义 4 设 $F: (R^m \times R^k, 0) \to (R, 0)$ 是 $f: (R^m, 0) \to R$ 的一个形变, 若 f 的任何一个形变 G 都与 F 的某个导出形变等价, 则称 $F(x, \lambda)$ 是 f 的通用形变。

注 2 由以上定义知, 若 F 是 f 的通用形变, G 是 f 的另一个形变, 由 F 的通用性, 必定存在恒等映射形变 $H: (R^m, 0) \to (R^m, 0)$ 及映射 $\phi: R^k \to R^l$ 满足 $G(x, \lambda) \to F(H(x, \lambda), \phi(\lambda))$。

定义 5 设 $F: (R^m \times R^k, 0) \to (R, 0)$ 是 $f: (R^m, 0) \to R$ 的一个形变, 若在 0 点的函数芽环 $C^\infty(0)$ 中的任何一个函数 $\alpha(x)$ 都可以表示为 $\alpha(x) = \sum_{i=1}^{m} h_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \frac{\partial F}{\partial \lambda_j}$, 其中 $h_i(x)$ 是 x 的光滑函数芽, λ_j 是数, 则称 F 是 f 的无穷小形变。

2 主要结果及证明

定理 1 设 $f: (R^m, 0) \to R$ 是光滑函数芽, 则 f 的无穷小形变一定存在。

证明 令 $F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j g_j(x)$, $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k) \in \mathbf{R}^k$, 其中 $g_i(x)$ 是空间 $C^\infty(0)/J(f)$ 的基元素的代表, 即 $[g_i(x)]$ 是基元素。

以下证明 $F(x, \lambda)$ 是 f 的无穷小形变:

由于 $\frac{\partial F}{\partial \lambda_j} = g_j(x)$, 设 $\alpha(x) \in C^\infty(0)$, 则 $[\alpha(x)]$

收稿日期: 2009-12-23
基金项目: 云南省教育厅资助项目(07c11666)
作者简介: 陈庆娥(1980-), 女, 云南宣威人, 助教, 硕士, 主要从事奇点理论方面的研究。

$\in C^{\infty}(0)/J(f)$, 设 $\dim[\alpha(x)]\in C^{\infty}(0)/J(f)=k$, 且设 $[g_1(x), g_2(x), \cdots, g_k(x)]$ 是空间 $C^{\infty}(0)/J(f)$ 的基, 于是 $[\alpha(x)]=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j[g_j(x)]$, 则

$$[\alpha(x)]=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)+\beta(x),\ \beta(x)\in J(f),$$

于是存在 $h_i(x)\in C^{\infty}(0)$, 使得

$$\beta(x)=\sum_{i=1}^{m}h_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i},\ \text{故}$$

$$\alpha(x)=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j(x)+\sum_{i=1}^{m}h_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

$$=\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial F}{\partial\lambda_j}+\sum_{i=1}^{m}h_i(x)\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

所以由定义可知 $F(x,\lambda)$ 是 f 的无穷小形变。

由于光滑函数芽的无穷小形变是它的通用形变, 进而得到光滑函数芽的通用形变一定存在。

例 1 设 $f(x)=x^n$, 求的通用形变。

解: 由于 $f(x)=x^n$, 则

$$\frac{\partial f}{\partial x}=nx^{n-1},\ J(f)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=(nx^{n-1})=(x^{n-1}),$$

$$\alpha(x)\in J(f)\Leftrightarrow\alpha(x)=\phi(x)x^{n-1},$$

其中 $\phi(x)\in C^{\infty}(0)$

于是

$\Leftrightarrow\alpha(x)$ 的泰勒级数中次数最低的是 kx^{n-1} 的形式,

即 $\alpha(x)=\sum_{j=n-1}^{\infty}a_i x^i$, 若 $[g(x)]\in C^{\infty}(0)/J(f)$,

则

$$p(x)\in[g(x)]$$

$$\Leftrightarrow p(x)\sim g(x)\Leftrightarrow p(x)-g(x)\in J(f)$$

$\Leftrightarrow p(x)-g(x)=\sum_{i=n-1}^{\infty}a_i x^i\Leftrightarrow p(x)$ 与 $g(x)$ 的级数前 $n-1$ 项完全相同, 若

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n+\cdots,$$

可以作对应

$[g(x)]\leftrightarrow(a_0, a_1, a_2, \cdots, a_{n-2})\in\mathbf{R}^{n-1}$, 所以

$C^{\infty}(0)/J(f)$ 的维数等于 $n-1$, 即

$C^{\infty}(0)/J(f)\cong R^{n-1}$, 于是可取

$[1], [x], [x^2], \cdots, [x^{n-2}]$ 为 $C^{\infty}(0)/J(f)$ 的一组基底, 故

$$F(x,\lambda)=f(x)+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_j g_j(x)=x^n+\sum_{j=0}^{n-2}\lambda_j x^j$$

$$=x^n+\lambda_0+\lambda_1x+\cdots+\lambda_{n-2}x^{n-2}$$

是 x^n 通用形变。

参 考 文 献:

[1] Arnold V I. Singularity Theory[M]. London Mathematical Society Lecture Note Series, London: London University Press, 1981, Vol. 53.

[2] 施恩伟. 流形上的微积分 [M]. 北京: 科学出版社, 2004.

[3] Arnold V I. Normal forms of functions in a neighbourhood of a degenerate critical point[J]. Russian Math Surveys, 1974, 29(2): 10-50.

[4] Newton I. The method of fluxions[M]. Mathematical papers, Cambridge: Cambridge University Press, 1969.

[5] 李养成. 光滑函数芽的奇点理论[M]. 北京: 科学出版社, 2002.

Versal Deformation of Smooth Function Germ

CHEN Qing-e[1], *ZHU En-chao*[2], *SHI Enwei*[3]

(1. School of Mathematics and statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;

2. Meteorological Department of Tianshui, Tianshui 741000, China;

3. Department of Mathematics, Yunnan Normal University, Kunming 650092, China)

Abstract The existence of the infinitesimally versal deformation of a smooth function germ is proved in the paper. The existence of the versal deformation of a smooth function germ is given. The method of calculating versal deformation is obtained.

Key words smooth function germ; versal deformation; infinitesimally versal deformation