

不动点定理在微分方程中的进一步研究

钟太勇, 邓乐斌, 余晓娟

(鄖阳师范高等专科学校数学系, 湖北 十堰 442000)

摘要: 文章主要是利用 Schauder 不动点定理来证明了 Peano 解的存在性定理, 并且利用 Schauder 定理进一步来研究不动点在微分方程中具体应用。

关键词: Schauder 不动点; Peano 解的存在性定理; 微分方程

中图分类号: O 175

文献标识码: A

引言

不动点定理是泛函分析理论的重要组成部分, 我们可以看到多种不同形式的不动点定理, 不动点定理在自然科学中有着广泛的应用。在文献 [1] 中利用 Picard 的逐次迭代法来证明微分方程初值问题解的存在和唯一性定理; 在文 [2] 中利用 Schauder 不动点定理和不等式证明了积分方程解的存在和唯一性; 在文 [3] 中作者用 Banach 不动点定理来简化了 Picard 定理的证明, 并且利用 Leray-Schauder 不动点定理以此说明了不动点定理在微分方程中的应用。在文 [7] 中作者用分析方法讨论两类不动点定理即 Banach 压缩映像原理和 Schauder 不动点定理分别在 Picard 解的存在唯一性定理和 Peano 解的存在性定理证明过程中的应用。本文主要是利用 Schauder 定理进一步来研究不动点在微分方程中具体应用。

1 预备知识

定义 1^[4] 称 $T: (X, \rho) \rightarrow (X, \rho)$ 是一个压缩映射, 如果存在 $0 < \alpha < 1$, 使得 $\rho(Tx, Ty) \leq \alpha \rho(x, y)$, ($\forall x, y \in X$)。

定理 1. 1^[4] (Banach 不动点定理—压缩映像原理) 设 (X, ρ) 是一个完备的距离空间, T 是 (X, ρ) 到自身的一个压缩映射, 则 T 在 X 上存在唯一的不动点。

定理 1. 2^[4] (Schauder 不动点定理) 设 $\Omega = S \cup \partial\Omega$; $F: \bar{\Omega} \rightarrow E$ 是全连续映射, 如 (1) $F(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$ 或 (2) $F(\partial\Omega) \subset \bar{\Omega}$ 即 F 在 $\bar{\Omega}$ 都有不动点。

2 Schauder 不动点定理的应用

本节我们主要利用 J. Schauder 在 1930 年给出的一个应用广泛的不动点定理——Schauder 不动点定理来证明 Peano 解的存在性定理, 它至今仍是研究非线性微分方程解存在性的有力工具。考察常微分方程

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \quad (1)$$

其中 $f: G \rightarrow R^n$, $G \subset R \times R^n$ 若给定 $(\tau, \xi) \in G$, ($\tau \in R$, $\xi \in R^n$) 则对于方程求一个函数 $\phi(t)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{dx(t)}{dt} = f(t, x(t)) \\ x(\tau) = \xi \end{cases} \quad (2)$$

的问题称为方程 (1) 的 Cauchy 问题, 而 $\phi(t)$ 称为 Cauchy 问题 (2) 的一个解。

定理 2. 1 (Peano 解的存在唯一性定理) 满足上述条件在具有初始条件在微分方程 (1) 在区间 $[t_0 - \beta, t_0 + \beta]$ 上有唯一解, 其中 $\beta < m \min \left\{ a, \frac{b}{c}, \frac{1}{k} \right\}$ 。

文献 [3] 已证明结果。

定理 2. 2 (Peano 解的存在性定理) 设函数 $f(x, t)$ 在 $R \times R^n$ 中的闭区域 $G: |t - \tau| \leq a, |x - \xi| \leq b$ 上连续, 则 Cauchy 初值问题 (1) 至少在区间 $I: |t - \tau| \leq h$ 上有解存在, 这里 $h = m \min \left[a, \frac{b}{m} \right]$, $M = \max_{(t,x) \in G} |f(t, x)|$ 。

证明 显然, (2) 等价于积分方程 $x(t) = \tau + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds$ 的求解。

令 $F: C[\tau - h, \tau + h] \rightarrow C[\tau - h, \tau + h]$ 表示如下:

$$F(x)(t) = \tau + \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds$$

易证 F 是连续映象, 令 $\bar{\Omega} = \{x \mid \|x - \xi\| < Mh\}$, 当 $x \in C[\tau - h, \tau + h]$

$$\|F(x) - \xi\| = \max_{\tau - h \leq t \leq \tau + h} \left| \int_{\tau}^t f(s, x(s)) ds \right| \leq \max_{\tau - h \leq t \leq \tau + h} M |t - \tau| \leq Mh$$

$$\text{又 } |F(x)(t_1) - F(x)(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} f(s, x(s)) ds \right| \leq M |t_2 - t_1| < \varepsilon \left\{ |t_2 - t_1| < \delta = \frac{\varepsilon}{M} \right\}$$

$F(c)$ 是相对紧的, 故 F 是全连续映象, 且 $F(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$ 据一般的 Schauder 定理, F 在 $\bar{\Omega}$ 有不动点, 即 Cauchy 问题 (2) 有解。

3 应用

考察非线性积分方程

$$x(t) = \int_0^1 e^{-st} \cos(\lambda x(s)) ds \quad (0 \leq t \leq 1, \lambda > 0)$$

这是一个特殊的 Hammerstein 积分方程, 现来证明它有连续解。

证明 定义映象 $f: C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ 如下:

$$F(x)(t) = \int_0^1 e^{-st} \cos(\lambda x(s)) ds$$

因任取 $\varepsilon > 0$ 存在 $\delta > 0$ 当 $\|x_1 - x_2\| < \delta$ 时,

$$\text{有 } |\cos(\lambda x_1(s)) - \cos(\lambda x_2(s))| < \varepsilon$$

故 $\|F(x_1) - F(x_2)\| =$

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 e^{-st} [\cos(\lambda x_1(s)) - \cos(\lambda x_2(s))] ds \right| \\ & \leq \max_{t \in [0, 1]} \int_0^1 e^{-st} |\cos(\lambda x_1(s)) - \cos(\lambda x_2(s))| ds \\ & < \max_{t \in [0, 1]} \varepsilon \int_0^1 e^{-st} ds < \varepsilon \end{aligned}$$

所以 F 是连续的。再者, 当 $x \in C[0, 1]$, 有

$$\|F(x)\| = \max_{t \in [0, 1]} \left| \int_0^1 e^{-st} \cos(\lambda x_1(s)) ds \right| \leq 1.$$

且

$$\begin{aligned} \|F(x)(t_1) - F(x)(t_2)\| &= \left| \int_0^1 (e^{-s t_1} - e^{-s t_2}) \cos(\lambda x(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^1 |e^{-s t_1} - e^{-s t_2}| ds \leq \frac{1}{2} |t_1 - t_2| < \varepsilon \end{aligned}$$

($\forall x \in C[0, 1], |t_1 - t_2| < \delta = 2\varepsilon$)

由 Arzela-Ascoli 定理, F 是全连续映象。如令 $\bar{\Omega} = \{x \mid \|x\| < 1\}$ 则显然有 $F(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$ 。

由 Schauder 不动点定理, F 在 $\bar{\Omega}$ 有不动点, 即积分方程存在连续解。

例 [5]: 设 $g: [0, b] \times R \times R \rightarrow R$ 是连续, 有界的, 则

两点边值问题

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dt^2} = g(t, u(t), u'(t)) & (0 \leq t \leq b) \text{ 有解。} \\ u(0) = u(b) = 0 \end{cases}$$

证明 令 $C'[0, b] = \{x \mid x'(t) \text{ 在 } [0, b] \text{ 连续}\}$ 在 $C'[0, b]$ 上定义 $\|x\| = \max_{t \in [0, b]} \{x(t), x'(t)\}$ 则 $C'[0, b]$ 是 Banach 空间。

$$\text{设 } |g(t, u(t), u'(t))| \leq M,$$

定义 $F: C'[0, b] \rightarrow C^{(1)}[0, b]$ 如下 ($0 \leq s, t \leq b$)

$$F(u)(t) = \int_0^t \int_0^s f(v, u(v), u'(v)) dv ds + f(u)(t) \quad (*)$$

这里 $f: C'[0, b] \rightarrow R$

$$f(u) = -\frac{1}{b} \int_0^b \int_0^s f(v, u(v), u'(v)) dv ds$$

显然 f 是连续泛函, 且 $|f(u)| \leq \frac{1}{b} M b^2 = M b$ 。现来证明 F 是全连续映象, 由于 f 是连续的, 易证 F 是连续的,

再者, 任取 $u \in C^{(1)}[0, b]$

则

$$\begin{aligned} \max_{t \in [0, b]} |F(u)(t)| &\leq \max_{t \in [0, b]} \left[\int_0^t M |dv| ds + |f(u)| b \right] \\ &\leq M b^2 + M b^2 = 2M b^2 \end{aligned}$$

$$\max_{t \in [0, b]} |F'(u)(t)| =$$

$$\begin{aligned} & \max_{t \in [0, b]} \left| \int_0^t f(v, u(v), u'(v)) dv + |f(u)| \right| \\ & \leq M b + M b = 2M b. \end{aligned}$$

令 $\rho = \max\{2M b^2, 2M b\}$, 即 $\|F(u)\| \leq \rho$

还有

$$\begin{aligned} |F(u)(t_1) - F(u)(t_2)| &\leq \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_0^s M |dv| ds \right| + \\ & M b |t_1 - t_2| \leq 2M b |t_1 - t_2| < \varepsilon \end{aligned}$$

$$|F'(u)(t_1) - F'(u)(t_2)| \leq M |t_1 - t_2| < \varepsilon$$

当 $|t_1 - t_2| < \delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2M b}, \frac{\varepsilon}{M}\right\}$, 即 $F(C^{(1)})$ 是相对紧集, 故 F 是全连续映象。

如令 $\bar{\Omega} = \{u \mid \|u\| < \rho\}$, 显然有 $F(\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}$ 故存在 u 使 $u = F(u)$ 。

由 (*), 显然有 $u(0) = u(b) = 0$ 求两次导就得到 $\frac{d^2 u}{dt^2} = f(t, u(t), u'(t))$ 即两点边值问题有解。

4 结论
不动点定理除了在微分方程和积分方程中的应用外, 在代数方程解的存在和唯一性定理证明中也起着重要的作用。容易看出, 利用不动点原理证明微分方程解的存在性问题是个体非常简便、巧妙的方法。

4 结论

不动点定理除了在微分方程和积分方程中的应用外, 在代数方程解的存在和唯一性定理证明中也起着重要的作用。容易看出, 利用不动点原理证明微分方程解的存在性问题是个体非常简便、巧妙的方法。

命题 3.1 若 $X \neq \emptyset$ 且 $G(r) \neq \emptyset$, 则 $X = \bigcup_{x \in X} Ix, X^*$]。

证明 若 $X \neq \emptyset$ 且 $G(r) \neq \emptyset$, 则 $x \in X^{(+)}$ 。此时若任意 $X = (x'_i)_{i \in I} \in X$ 则 $X \geq X$ 。否则若 $X < X$, 则存在 $x'_i < x_i$ 。当 $i \in G(a) \cup G(b)$ 时, $x'_i < r$, 即 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x'_i) = x'_i < (a_i \alpha x_i) = r$ 矛盾。当 $i \in G_1(a) \cup G_1(b)$ 时, $x'_i < d_i$, 不妨设 $a_i < b_i$, 则 $\bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x'_i) = x'_i < (b_i \alpha x_i) = r$ 矛盾。所以有 $X \geq X$ 。又因为 $r = A@X = B@X \leq A@X = B@X \leq A@X^* = B@X^* = r$, 所以 $X \in \bigcup_{x \in X} Ix, X^*$]。由 X 的任意性知 $X \subseteq \bigcup_{x \in X} Ix, X^*$]。

另一方面有上面的证明知, 任意的 $X \in \bigcup_{x \in X} Ix, X^*$], 有 $X \in X$ 。所以 $X = \bigcup_{x \in X} Ix, X^*$]。

参考文献:

[1] Di Nola A, Sessa S, Pedrycz W, et al Fuzzy Relation Equations and Their Applications to Knowledge Engineering [M]. Boston/London Kluwer Academic Publishers Dordrecht 1989

[2] 熊清泉. [0, 1]格上无限 Fuzzy 关系方程 $A \odot X = b$ 的解集 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2002, 16 218-221
[3] 余布雷, 王学平. [0, 1]格上无限双线性方程的一些性质及其解集 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2005, 28(2): 154-157.
[4] Crawley P, Dilworth R. P. Algebraic Theory of Lattices [M]. Prentice Hall Englewood Cliffs N J 1973
[5] Zhao Cukui Onmatrix equations in a class of complete and completely distributive lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems 1987, 22 303-320
[6] Li Yumei, Wang Xueping The solution sets of @-fuzzy relational equation in finite domains and on a complete Brouwerian lattice [J]. India J pure appl Math 2003, 34 1249-1257.
[7] 张琳, 王学平. 模糊关系 R 的 σ 分解 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2007, 30(2): 151-153
[8] 叶俊, 张先君. 模糊决策在工程投标中的应用 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(4): 11-12

Infinite @ - fuzzy Bilinear Equations on [0, 1]

ZHANG Lin

(Sichuan Modern Vocational College, Chengdu 610213, China)

Abstract In this paper, we deal with the infinite @-fuzzy bilinear equation $A@X = B@X = r$ or $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$ where $I = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ on [0, 1] lattice. Some properties of @-fuzzy bilinear equation are given, then the necessary and sufficient conditions that the solution sets are nonempty are scored. At last, when $X \neq \emptyset$ and $G(r) \neq \emptyset$, the solution sets are obtained.

Key words infinite bilinear equations, the solution sets

(上接第 148 页)

参考文献:

[1] 丁同仁, 李承治. 常微分方程教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.
[2] 查淑玲, 关文吉. 积分方程局部解的存在唯一性 [J]. 渭南师范学院学报, 2007, 22(2): 15-16
[3] 余晓娟, 钟太勇, 李俊华. 不动点定理在微分方程中的应用 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(3): 22-24

[4] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.
[5] 游兆永, 龚怀云, 徐宗本. 非线性分析 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.
[6] 郭大钧. 非线性泛函分析. 2版 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2001.
[7] 杜珺. 两类不动点原理在微分方程解的存在性中的应用 [J]. 淮南师范学院学报, 2008, 10(49): 127-129

Futher Research of the Fixed Point Theorem in Differential Equations

ZHONG Tai-yong, DENG Le-bin, YU Xiao-juan

(Dept of Mathematics, Yunyang Teachers College, Shiyang 442000, China)

Abstract This paper mainly simplify proved the existence of solutions of Peano theorem by the Schauder Fixed Point theorem and some applications of Schauder Fixed Point in different equations are demonstrated.

Key words Schauder Fixed Point existent theorem, of Peano solutions, differential equations.