

[0, 1]格上无限@-fuzzy 双线性方程

张琳

(四川现代职业学院, 成都 610213)

摘要: 文章在 [0, 1] 格上讨论了无限 @ fuzzy 双线性方程, 即 $A@X = B@X = r$, 或 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$ 且 $I = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ 。首先讨论了方程的一些性质和解集非空的充分必要条件, 然后给出了当 $X \neq \emptyset$ 且 $G(r) \neq \emptyset$ 时, 无限 @ fuzzy 双线性方程的部分解集。

关键词: 无限; 双线性; 解集

中图分类号: O 159

文献标识码: A

1 预备知识

定义 1.1^[1] 在 [0, 1] 上, $a \alpha b = \begin{cases} 1 & a \leq b \\ b & a > b \end{cases}$ 。

定义 1.2^[2] 设 $A = (a_i)_{i \in I}$ 为已知向量, $X = (x_i)_{i \in I}$ 为未知向量, $a, b, r \in [0, 1]$, I 为无限集合, 称 $A@X = b$ 或 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = b$ 为一个无限 @ fuzzy 模糊关系方程, 其中 @ 是 inf- α 合成。

定义 1.3^[3] 设 $A = (a_i)_{i \in I}$, $B = (b_i)_{i \in I}$ 为已知向量, $X = (x_i)_{i \in I}$ 为未知向量, $a, b, r \in [0, 1]$, $I = \{1, 2, \dots, n, \dots\}$ 为无限集合, 或 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$ 为一个无限 @ fuzzy 双线性方程, 其中 @ 是 inf- α 合成。

定义 1.4^[3] 设 X 为方程 $A@X = B@X = r$ 的解, 记 $x = \{X | A@X = B@X = r\}$, 则称 x 为 $A@X = B@X = r$ 的解集, 称 r 是与 $x > a$ 相关的结果。

定义 1.5^[4] S 为一偏序集 P 的非空子集, 若不存在 $x \in S$ 使得 $x > a$, 则称 a 为 S 的极大元。

定义 1.6^[5] 如果 $a \in L$, $\{x_i | i \in I\} \subseteq L$, 其中 I 是某个指标集, 则 $a \alpha (\bigwedge_{i \in I} x_i) = \bigwedge_{i \in I} (a \alpha x_i)$ 。

定义 1.7^[6] 如果 $X_1, X_2 \in \mathcal{X}$ 则 $X_1 \leq X \leq X_2$ 蕴含着 $X \in \mathcal{X}$ 。

定义 1.8^[7] 设 $X = (x_i)_{i \in I} \in \mathcal{X}$ 。(1)若存在 $(i, j) \in I \times I$ 使得 $a_i \alpha x_i = r, b_j \alpha x_j = r$, 则由这样的解构成的解集记做 X^{+} 。(2)若任意 $(i, j) \in I \times I$ 有 $a_i \alpha x_i > r, b_j \alpha x_j > r$, 则由这样的解构成的解集记做 X^{-} 。(3)若存在 $i \in I$ 使得 $a_i \alpha x_i = r$ 而任意 $j \in I, b_j \alpha x_j > r$ 则

由这样的解构成的解集记做 X^{+-} 。(4)若任意 $i \in I, a_i \alpha x_i > r$, 而存在 $j \in I$ 使得 $b_j \alpha x_j = r$, 则由这样的解构成的解集记做 X^{-+} 。

下面给出一些要用到的符号。

$$\begin{aligned} G(a) &= \{i | a_i > r\}, G(b) = \{i | b_i > r\}. \\ G_1(a) &= \{i | a_i \leq r\}, G_2(b) = \{i | b_i \leq r\}. \\ G(r) &= \{(i, j) : i \in G(a), j \in G(b)\}. \\ d_i &= \max\{a_i, b_i\}, s_i = \min\{a_i, b_i\}. \\ G_a &= \{i \in G(a) : a_i > x_i > r\}. \\ G_b &= \{i \in G(b) : b_i > x_i > r\}. \end{aligned}$$

2 无限双线性方程 $A@X = B@X = r$ 解集的一些性质

命题 2.1 若 $G(r) \neq \emptyset$ 则 $x \neq \emptyset$ 。

证明 若 $G(r) \neq \emptyset$ 设 $X = (x_i)_{i \in I}$, 其中 x_i 定义如下:

$$x_i = \begin{cases} r & i \in G(a) \\ r & i \in G(b) \setminus G(a) \\ 1 & i \in I \setminus (G(b) \cup G(a)) \end{cases}$$

则:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) &= \bigwedge_{i \in G(a)} (a_i \alpha x_i) \bigwedge_{i \in G(b) \setminus G(a)} (a_i \alpha x_i) \bigwedge_{i \in I \setminus (G(b) \cup G(a))} (a_i \alpha x_i) \\ &= \bigwedge_{i \in G(a)} (a_i \alpha x_i) \bigwedge_{i \in G(b) \setminus G(a)} (a_i \alpha x_i) \\ &= r \bigwedge_{i \in G(b) \setminus G(a)} (a_i \alpha x_i) \\ &= r. \end{aligned}$$

同理 $\bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$ 可得 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$

r, 所以 $x \neq \phi$.

命题 2.2 $x^{+} \neq \phi$ 的充要条件是 $G(r) \neq \phi$.

证明 \Rightarrow 因为 $x^{+} \neq \phi$, 即有 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$ 则一定存在 $i, j \in I$ 使得 $a_i \alpha x_i = b_j \alpha x_j = r$, 则有 $a_i > r, b_j > r$, 所以 $G(r) \neq \phi$.

\Leftarrow 若 $G(r) \neq \phi$, 则存在 $(i_0, j_0) \in G(r)$, 使得 $a_{i_0} > r, b_{j_0} > r$. 设 $X = (x_i)_{i \in I}$ 其中 x_i 定义如下:

$$x_i = \begin{cases} r & i = i_0 \\ r & i = j_0 \\ 1 & i \in I \setminus \{i_0, j_0\} \end{cases}$$

即存在 $a_{i_0} \alpha x_{i_0} = b_{j_0} \alpha x_{j_0} = r$ 使得 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = r$, 所以 $x^{+} \neq \phi$.

命题 2.3 $x^{-} \neq \phi$ 的充要条件是 $|G(a)| = \infty$ 且 $|G(b)| = \infty$.

证明 \Rightarrow 因为 $x^{-} \neq \phi$, 设 $X = (x_i)_{i \in I} \in x^{-}$. 则任意 $(i, j) \in I \times I$ 有 $a_i \alpha x_i > r, b_j \alpha x_j > r$. 如果 $|G(a)| < \infty$, 则 $r = \bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in G(a)} (a_i \alpha x_i) > r$ 矛盾; 如果 $|G(b)| < \infty$, 则 $r = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in G(b)} (b_i \alpha x_i) > r$ 矛盾. 所以 $|G(a)| = \infty$ 且 $|G(b)| = \infty$.

\Leftarrow 设 $|G(a)| = \infty$ 且 $|G(b)| = \infty$ 若 $G(r) \neq \phi$, 构造 $X = (x_i)_{i \in I}$ 其中 x_i 定义如下:

$$x_i = \begin{cases} r + (d_i - r) \frac{1}{i+1} & i \in G(a) \cup G(b) \\ 1 & i \in I \setminus (G(a) \cup G(b)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) &= \bigwedge_{i \in G(b) \cup G(a)} (a_i \alpha x_i) \bigwedge_{i \in I \setminus (G(b) \cup G(a))} (a_i \alpha x_i) \\ &= \bigwedge_{i \in G(a)} (a_i \alpha x_i) \bigwedge_{i \in G(b)} (a_i \alpha x_i) \\ &\quad \bigwedge_{i \in I \setminus (G(b) \cup G(a))} (a_i \alpha x_i) \\ &= \bigwedge_{i \in G(a)} r + (d_i - r) \frac{1}{i+1} \\ &= r. \end{aligned}$$

同理可证: $\bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$. 所以 $x^{-} \neq \phi$.

命题 2.4 $x^{+-} \neq \phi$ 的充要条件是 $\bigwedge_{i \in G_c} x_i = r, G(a) \neq \phi$.

证明 \Rightarrow 因为 $x^{+-} \neq \phi$, 设 $X = (x_i)_{i \in I} \in x^{+-}$. 即有 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$, 则一定存在 $i \in I$ 使得 $a_i \alpha x_i = r$, 则有 $a_i > r$, 所以 $G(a) \neq \phi$. 同时任意的 $i \in I$ 有 $b_i \alpha x_i > r$. 当 $b_i \leq x_i$ 时, $b_i \alpha x_i = 1$ 不合题意. 要使 $\bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$, 则 $b_i > x_i > r$. 因此 $\bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in G_c} (b_i \alpha x_i) = r$, 即 $\bigwedge_{i \in G_c} x_i = r$.

\Leftarrow 设 $\bigwedge_{i \in G_c} x_i = r, G(a) \neq \phi$, 构造 $X = (x_i)_{i \in I}$ 其中 x_i 定义如下:

$$x_i = \begin{cases} r & i = j_0 \in G(a) \\ x_p & i \in G_r \setminus \{j_0\} \\ 1 & i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\}) \end{cases}$$

于是: $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$, 所以 $x^{+-} \neq \phi$.

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) &= (a_{j_0} \alpha x_{j_0}) \bigwedge_{i \in G_r \setminus \{j_0\}} (a_i \alpha x_i) \\ &\quad \bigwedge_{i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\})} (a_i \alpha x_i) \\ &= r \bigwedge_{i \in G_r \setminus \{j_0\}} (a_i \alpha x_i) \bigwedge_{i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\})} 1 \\ &= r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) &= (b_{j_0} \alpha x_{j_0}) \bigwedge_{i \in G_r \setminus \{j_0\}} (b_i \alpha x_i) \\ &\quad \bigwedge_{i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\})} (b_i \alpha x_i) \\ &= (b_{j_0} \alpha r) \bigwedge_{i \in G_r \setminus \{j_0\}} 1 \bigwedge_{i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\})} 1 \\ &= r \end{aligned}$$

即 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$, 所以 $x^{+-} \neq \phi$.

命题 2.5 $x^{++} \neq \phi$ 的充要条件是 $\bigwedge_{i \in G_c} x_i = r, G(b) \neq \phi$.

证明 \Rightarrow 因为 $x^{++} \neq \phi$, 设 $X = (x_i)_{i \in I} \in x^{++}$. 即有 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$, 则一定存在 $i \in I$ 使得 $b_i \alpha x_i = r$, 则有 $b_i > r$, 所以 $G(b) \neq \phi$. 同时任意的 $i \in I$ 有 $a_i \alpha x_i > r$. 当 $a_i \leq x_i$ 时, $a_i \alpha x_i = 1$ 不合题意. 要使 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = r$, 则 $a_i > x_i > r$. 因此 $\bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = \bigwedge_{i \in G_c} (a_i \alpha x_i) = r$, 即 $\bigwedge_{i \in G_c} x_i = r$.

\Leftarrow 设 $\bigwedge_{i \in G_c} x_i = r, G(b) \neq \phi$, 构造 $X = (x_i)_{i \in I}$ 其中 x_i 定义如下:

$$x_i = \begin{cases} r & i = j_0 \in G(b) \\ x_p & i \in G_r \setminus \{j_0\} \\ 1 & i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\}) \end{cases}$$

于是:

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} (a_i \alpha x_i) &= (a_{j_0} \alpha x_{j_0}) \bigwedge_{i \in G_r \setminus \{j_0\}} (a_i \alpha x_i) \\ &\quad \bigwedge_{i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\})} (a_i \alpha x_i) \\ &= (a_{j_0} \alpha r) \bigwedge_{i \in G_r \setminus \{j_0\}} 1 \bigwedge_{i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\})} 1 \\ &= r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i \in I} (b_i \alpha x_i) &= (b_{j_0} \alpha x_{j_0}) +_{i \in G_r \setminus \{j_0\}} (b_i \alpha x_i) \\ &\quad +_{i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\})} (b_i \alpha x_i) \\ &= r +_{i \in G_r \setminus \{j_0\}} (b_i \alpha x_i) +_{i \in I \setminus (G_r \setminus \{j_0\})} 1 \\ &= r \end{aligned}$$

即 $+_{i \in I} (a_i \alpha x_i) = +_{i \in I} (b_i \alpha x_i) = r$, 所以 $x^{++} \neq \phi$.

3 无限双线性方程 $A @ 6 = B @ 6 = r$ 部分解集

定义 311 若 $G(r) X <$ 定义 $6_* = (x_i)_{i \in I}$, 如下:

$$x_i = \begin{cases} r & i \in G(a) \cup G(b) \\ d_i & i \in G_1(a) \cup G_1(b) \end{cases}$$

则由定义 3.1 易知 $6_* \in v_0$.

定义 312 $G(r) X <$ 令 $(i, j) \in I \times G(r)$, 定义 $V^\circ = \{6^* : 6^* = (x_i)_{i \in I}\}$, 定义 $6^* = (x_i)_{i \in I}$ 如下:

$$x_i = \begin{cases} r & i \in \{i, j\} \\ 1 & i \in I \setminus \{i, j\} \end{cases}$$

则由定义 3.2 易知 6^* 是极大元, 且 $V^\circ \in v_0$.

命题 311 若 $VX <$ 且 $G(r) X <$ 则 $V = G_{\delta_i, \delta_i} [6^*, 6^*]$ 。

证明 若 $VX <$ 且 $G(r) X <$ 则 $V \in V^+$ 。此时若任意 $6 = (x_i)_{i \in I} \in V$, 则 $6 \in 6^*$ 。否则若 $6 < 6^*$, 则存在 $x_i < x_i^*$ 。当 $i \in I$ 且 $G(a) G G(b)$ 时, $x_i < r$, 即 $\bigwedge_{i \in I} (a_i x_i) = x_i < (a_i x_i^*) = r$ 矛盾。当 $i \in I$ 且 $G_1(a) G G_1(b)$ 时, $x_i < r$, 不妨设 $a_i < b_i$, 则 $\bigwedge_{i \in I} (b_i x_i) = x_i < (b_i x_i^*) = r$ 矛盾。所以有 $6 \in 6^*$ 。又因为 $r = A @ 6^* = B @ 6^* \wedge A @ 6 = B @ 6 \wedge A @ 6^* = B @ 6^* = r$, 所以 $6 \in G_{\delta_i, \delta_i} [6^*, 6^*]$, 由 6 的任意性知 $V \in G_{\delta_i, \delta_i} [6^*, 6^*]$ 。

另一方面有上面的证明知, 任意的 $6 \in G_{\delta_i, \delta_i} [6^*, 6^*]$, 有 $6 \in V$ 。所以 $V = G_{\delta_i, \delta_i} [6^*, 6^*]$ 。

参考文献:

[1] Di Nola A, Sessa S, Pedrycz W, et al Fuzzy Relation Equations and Their Applications to Knowledge Engineering [M]. Boston/London: Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989.

[2] 熊清泉. [0, 1]格上无限 Fuzzy 关系方程 $AP6 = b$ 的解集 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2002, 16: 2182221

[3] 余布雷, 王学平. [0, 1]格上无限双线性方程的一些性质及其解集 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2005, 28(2): 1542157.

[4] Crawley P, Dilworth R. P. Algebraic Theory of Lattices [M]. Prentice Hall Englewood Cliffs N J 1973

[5] Zhao Cukui On matrix equations in a class of complete and completely distributive lattices [J]. Fuzzy Sets and Systems 1987, 22: 303320

[6] Li Yumei, Wang Xueping The solution sets of @ 2fuzzy relational equation in finite domains and on a complete Brouwerian lattice [J]. India J pure appl Math 2003, 34: 124921257.

[7] 张琳, 王学平. 模糊关系 R 的 R 分解 [J]. 四川师范大学学报: 自然科学版, 2007, 30(2): 1512153

[8] 叶俊, 张先君. 模糊决策在工程投标中的应用 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(4): 11212

Infinite @ 2fuzzy Bilinear Equations on [0, 1]

ZHANG Lin

(Sichuan Modern Vocational College, Chengdu 610213, China)

Abstract In this paper, we deal with the infinite @ 2fuzzy bilinear equation $A @ X = B @ X = r$ or $\bigwedge_{i \in I} (a_i x_i) = \bigwedge_{i \in I} (b_i x_i) = r$ where $I = \{1, 2, \dots, n\}$ on [0, 1] lattice. Some properties of @ 2fuzzy bilinear equation are given, then the necessary and sufficient conditions that the solution sets are nonempty are scored. At last, when $VX <$ and $G(r) X <$, the solution sets are obtained.

Key words infinite bilinear equations, the solution sets

(上接第 148 页)

参考文献:

[1] 一同仁, 李承治. 常微分方程教程 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2001.

[2] 查淑玲, 关文吉. 积分方程局部解的存在唯一性 [J]. 渭南师范学院学报, 2007, 22(2): 15216

[3] 余晓娟, 钟太勇, 李俊华. 不动点定理在微分方程中的应用 [J]. 四川理工学院学报: 自然科学版, 2008, 21(3): 22224

[4] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析 [M]. 北京: 北京大学出版社, 1987.

[5] 游兆永, 龚怀云, 徐宗本. 非线性分析 [M]. 西安: 西安交通大学出版社, 1991.

[6] 郭大钧. 非线性泛函分析. 2版 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2001.

[7] 杜璐. 应用 [J]. 淮南师范学院学报, 2008, 10(49): 1272129

Futher Research of the Fixed Point Theorem in Differential Equations

ZHONG Taiyong, DENG Lezhin, YU Xiaozhuan

(Dept of Mathematics, Yinyang Teachers College, Shiyang 442000, China)

Abstract This paper mainly simplify proved the existence of solutions of Peano theorem by the Schauder Fixed Point theorem and some applications of Schauder Fixed Point in different equations are demonstrated.

Key words Schauder Fixed Point existent theorem, of Peano solutions, different equations.