

# Hilbert空间中伪单调变分不等式的严格可行性

刘小兰

(四川理工学院理学院, 四川 自贡 643000)

**摘要:** 文章在映射为全连续场和伪单调的情况下, 运用拓扑度的同伦不变性, 切除性等性质, 证明了在 Hilbert空间中变分不等式解的非空有界性等价于严格可行性, 将已有的结果从有限维欧氏空间推广到了无穷维的 Hilbert空间中。

**关键词:** 变分不等式; 拓扑度; 严格可行性; 全连续场; 伪单调映射

**中图分类号:** O 22 O 177. 92

**文献标识码:** A

本文中, 除有特别说明外, 我们假设  $H$  是一个 Hilbert空间,  $K$  是  $H$  的一个非空闭凸子集,  $F$  是  $K \rightarrow H$  的连续映射。我们考虑下面的变分不等式问题 (VIP( $K, F$ )): 找到一个  $x^* \in K$ , 使得对任意的  $y \in K$ ,

$$\langle F(x^*), y - x^* \rangle \geq 0$$

当  $K$  是一个凸锥, 补问题 (CP( $K, F$ )) 为: 找到一个  $x \in K$ , 使得

$$F(x) \in K^+, \langle F(x), x \rangle = 0$$

这里  $K^+$  是  $K$  的对偶锥, 对偶锥定义为:

$$K^+ = \{x^* \in H: \langle x^*, x \rangle \geq 0 \forall x \in K\}$$

让  $\text{barr}(K)$  表示  $K$  的闸锥, 它的定义我们将在下部分给出来。假设  $\text{int}(\text{barr}(K))$  的内部非空, 变分不等式问题 VIP( $K, F$ ) 称为严格可行的, 假如

$$F(K) \cap \text{int}(-\text{barr}(K)) \neq \emptyset$$

严格可行性在变分不等式算法的发展中起着极为重要的作用, 特别是在内点算法和延拓方法中, 见参考文献 [1-3]。从理论的角度讲, 假如  $F$  满足某种单调性, 那么变分不等式问题的严格可行性就隐含着变分不等式问题解的非空有界性, 见参考文献 [4-6]。近年来, 有一些研究者在考虑相反的问题: 解的非空有界等价于变分不等式解 VIP( $K, F$ ) 的严格可行性, 在不同的条件下, 见参考文献 [7-9]。[7] 证明了在  $x \mapsto F(x) + N_K(x)$  这个映射是极大单调的情况下, 两者的等价性,  $N_K(x)$  是  $K$  在  $x$  点的法锥。在此情况下, 当  $H = R^n$  和  $K$  为框时, 假设  $F$  是一个  $P_0$  映射, [6] 证明了等价性; 当  $H = R^n$  和  $K = R_+^n$  时, 假设  $F$  是一个  $P$  映射, [8] 证明了等

价性; 当  $H = R^n$  和  $K$  是一个  $R^n$  的闭凸锥时, 假设  $F$  是  $K$  上的伪单调映射, [10] 定理 2.4.4 证明了等价性。[11] 证明了等价性, 在假设  $F$  是集值映射, 并且是  $K$  上的稳定伪单调映射,  $F$  在  $K$  的直线段上的限制是上半连续时 (参见文献 [12])。[11] 的结果推广了 [9] 的结果, 在那空间是一个自反 Banach 空间。文献 [9-11] 和文献 [6-8, 10] 的等价性结果不同之处在于: 文献 [9-11] 中, 映射  $F$  是集值映射, 甚至当把映射限制到单值映射时, 连续性假设也比 [6-8, 10] 的假设条件更弱。其他一些关于等价性相关结果 (包括 [5, 13]), 在假设  $H = R^n$  和  $K = R_+^n$  时, 证明了变分不等式问题 VIP( $K, F$ ) 的严格可行性。

本文在 Hilbert 空间中, 假设  $F$  是伪单调映射和全连续场, 证明了变分不等式问题 VIP( $K, F$ ) 的解的非空有界性等价于 VIP( $K, F$ ) 严格可行性。众所周知, 在有限维空间中, 任何一个连续映射都是全连续场。因此本文的结果就是把文献 [10] 中的有限维欧氏空间的结果推广到了无穷维的 Hilbert 空间中。

## 1 预备知识

设  $H$  是一个 Hilbert 空间,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  为内积,  $K$  是  $H$  的一个非空闭凸子集,  $\text{int}(K)$  表示  $K$  的内部;  $\text{cl}(K)$  表示  $K$  的闭包;  $\text{bd}(K)$  表示  $K$  的边界;

$\text{barr}(K) = \{x^* \in H: \sup_{x \in K} \langle x^*, x \rangle < \infty\}$  表示  $K$  的闸锥;

$K_\infty = \{d \in H: \exists t_n \rightarrow 0+, \exists x_n \rightarrow K, t_n x_n \rightarrow d\}$  表示  $K$  的回收锥, 这里 “ $\rightarrow$ ” 表示的是弱收敛;

$cone(K) = \{tx \mid t \in R_+, x \in co(K)\}$ ,  $co(K)$ 表示  $K$  的凸包;  $K^- = \{x^* \in H: \langle x^*, x \rangle \leq 0 \ \forall x \in K\}$  表示  $K$  的负极锥; 由 [14 命题 3.10]知,

$$[barr(K)]^- = K_\infty$$

因为  $K$ 是闭凸的,对任意的  $x \in H$ , 投影

$$\Pi_K(x): \{x \in K: \|y - x\| = inf\|y - x\|$$

为非空,并且是单点的。

大家熟知的关于投影的变分原则 ([15])为

$$\bar{x} = \Pi_K(x) \Leftrightarrow \langle \bar{x} - x, y - \bar{x} \rangle \geq 0 \ \forall y \in K \quad (1)$$

让  $SOL(K, F)$ 表示变分不等式问题  $VP(K, F)$ 的解集,  $R(x) = x - \Pi_K(x - F(x))$ 。(1)式的一个结果是

$$\bar{x} \in SOL(K, F) \Leftrightarrow R(\bar{x}) = 0$$

映射  $T: H \rightarrow H$ 被称为紧的,如果  $T$ 是连续的,并且对任何  $H$ 的有界子集  $A$ ,  $T(A)$ 是  $H$ 的相对紧集,也即是,  $cl(T(A))$ 是紧的。我们称  $F: H \rightarrow H$ 是全连续场,如果  $F$ 具有形式  $F(x) = x - T(x)$ , 这里  $T: H \rightarrow H$ 是一个紧映射。我们称  $F$ 是  $K$ 上的伪单调映射,如果  $\forall x, y \in K$ ,

$$\langle F(x), y - x \rangle \geq 0 \Rightarrow \langle F(y), y - x \rangle \geq 0$$

以下的结果是熟知的:

引理 1.1 ([9 命题 2.1])。  $K$ 是  $H$ 的一个非空闭凸子集,  $barr(K)$ 有非空内部。假设  $C$ 是  $K$ 的一个非空闭凸子集,则  $C_\infty = \{0\} \Leftrightarrow C$ 有界。

引理 1.2 ([9 命题 2.2])。  $K$ 是  $H$ 的一个非空闭凸子集。

(1)如果  $barr(K)$ 有非空内部,则不存在  $\{x_n\} \subset K$ ,

$$\|x_n\| \rightarrow \infty, \frac{x_n}{\|x_n\|} \rightarrow 0.$$

(2)如果再加上  $K$ 是一个锥,则不存在  $\{d_n\} \subset K$ ,

$$\|d_n\| = 1, d_n \rightarrow 0.$$

下面的结果是文献 [9]的特殊情况:

命题 1.1  $K$ 是  $H$ 的一个非空闭凸子集。假设  $F: H \rightarrow H$ 在  $K$ 上是连续的,伪单调的。如果  $inbarr(K) \neq \phi$ , 则  $SOL(K, F)$ 非空有界  $\Leftrightarrow K_\infty \cap F(K)^- = \{0\}$

## 2 主要结果

定理 2.1  $K$ 是  $H$ 的一个非空闭凸子集,  $F: H \rightarrow H$ 是全连续场,  $F(x) = x - T(x)$ ,  $T: H \rightarrow H$ 是一个紧映射。假设  $F$ 是  $K$ 上的伪单调映射,  $inbarr(K) \neq \phi$ 。则  $SOL(K, F)$ 非空有界

$$\Leftrightarrow F(K) \cap in[-barr(K)] \neq \phi \quad (2)$$

证明 “ $\Rightarrow$ ”。假设  $SOL(K, F)$ 是非空有界的,由

命题 1.1, 有

$$K_\infty \cap F(K)^- = \{0\} \quad (3)$$

取  $K$ 中任意的向量  $\alpha$  定义一个同伦:

$$h(x, t) = x - \Pi_K(t(x - F(x)) + (1 - t)\alpha), \quad (x, t) \in H \times [0, 1] \quad (4)$$

$$C = \{x \in H: h(x, t) = 0 \ t \in [0, 1]\}$$

我们称  $C$ 是有界的。假如不是, 存在序列  $\{t_k\} \subset [0, 1]$ ,  $\{x_k\} \subset H$ , 满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty, h(x_k, t_k) = 0 \ \forall k \quad (5)$$

由 (4)和 (5), 我们知道对充分大的  $k$ ,  $t_k > 0$ 。(假如  $t_k = 0$  则由 (4)和 (5),  $x_k = \alpha$  这和  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$  是矛盾的。)由同伦映射  $h$ 的定义, 有  $x_k \in K, \forall k$ ; 再由 (1), 得对  $\forall y \in K$  满足:

$$\langle tF(x_k) + (1 - t_k)(x_k - \alpha), y - x_k \rangle \geq 0$$

进而得出:

$$\langle F(x_k), y - x_k \rangle \geq -\frac{1 - t_k}{t_k} \langle y - x_k, x_k - \alpha \rangle$$

固定  $y \in K$ 。因为  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\| = \infty$ , 对于充分大的  $k$  上面表达式的右边是非负的。因此,  $F$ 的伪单调性, 得到对充分大的  $k$

$$\langle F(y), y - x^k \rangle \geq 0 \quad (6)$$

让  $d$ 为序列  $\left\{ \frac{x_k}{\|x_k\|} \right\}$ 的弱收敛点。则  $d \in K_\infty$ , 由引

理 1.2得,  $d \neq 0$ 。(6)式的两边除以  $\|x_k\|$  让  $k \rightarrow \infty$  得  $\langle F(y), d \rangle \leq 0$ 。因为  $y \in K$ 是任意的,  $d \in F(K)^-$ 。因此, 我们证明了  $0 \neq d \in K_\infty \cap F(K)^-$ , 与 (3)式矛盾。因此,  $C$ 是有界的。

取  $U$ 为包含  $C \cup \{\alpha\}$ 的有界开集。如果  $x \in cl(U)$ , 满足  $h(x, t) = 0$  对某  $t \in [0, 1]$ , 则  $x \in bd(U)$ , 因为  $U$ 是包含  $C$ 的开集, 所以  $0 \in h(bd(U) \times [0, 1])$ 。

因为  $R(x) = h(x, 1)$ ,  $R^{-1}(0) \subset C$ 。由  $U$ 是包含  $C$ 的开集,  $R^{-1}(0) \cap bd(U) = \phi$ 。对任意  $x \in H$ ,  $\Pi_K(x - F(x)) = \Pi_K(T(x))$ 。  $\Pi_K$ 是 Lipschitz连续的,  $T(x)$ 是紧的, 我们有映射  $x \mapsto \Pi_K(x - F(x))$ 是紧的, 则  $R(x) = x - \Pi_K(x - F(x))$ 是一个全连续场。由 Leray-Schauder 拓扑度的定义 (参见文献 [16-17])知, 拓扑度  $deg(R, U)$ 是有定义的。由拓扑度的同伦不变性 ([16 定理 4.3.4])知,

$$\begin{aligned} deg(R, U) &= deg(h(\cdot, 1), U) \\ &= deg(h(\cdot, 0), U) \\ &= deg(I - \alpha, U) = 1 \end{aligned}$$

这里  $I$ 表示恒等映射。又由拓扑度的切除性 ([16 定理 4.3.9]),  $U$ 可以替换成任何包含  $R^{-1}(0) \cup \{\alpha\}$ 的有界开集, 也就是说,

$$\begin{aligned} deg(R, \Omega) &= deg(h(\cdot, 1), \Omega) \\ &= deg(h(\cdot, 0), \Omega) \\ &= deg(I - \alpha, \Omega) = 1 \end{aligned}$$

对任何  $R^{-1}(0) \cup \{\alpha\}$ 的有界开集均成立。

取  $q$ 为  $in(-barr(K))$ 中的任意一个向量。对任意  $\varepsilon > 0$  定义

$$R^\varepsilon(x) = x - \Pi_K(x - F(x) + \varepsilon q)$$

由  $\Pi_K$  的非扩张性得,

$$\begin{aligned} & \|R(x) - R^\varepsilon(x)\| \\ &= \|\Pi_K(x - F(x) + \varepsilon q) - \Pi_K(x - F(x))\| \\ &\leq \|\varepsilon q\| = \varepsilon \|q\| \end{aligned}$$

因此, 由 [16] 定理 4.3.7], 对充分小的  $\varepsilon > 0$  有  $\deg(R^\varepsilon, \Omega) = \deg(R, \Omega) = 1$  这里  $\Omega$  是包含  $R^{-1}(0) \cup \langle q \rangle$  的有界开集。所以, 存在一个  $x_0 \in \Omega$  满足  $R^\varepsilon(x_0) = 0$ 。由此知,  $x_0 \in K$ , 有

$$\langle F(x_0) - \varepsilon q, y - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall y \in K$$

由  $\text{barr}(K)$  的定义,

$$F(x_0) - \varepsilon q \in -\text{barr}(K)。$$

因为  $q \in \text{int}(-\text{barr}(K))$ , 我们有

$$\begin{aligned} F(x_0) &\in \varepsilon q - \text{barr}(K) \\ &\subset \text{int}(-\text{barr}(K)) - \text{barr}(K) \\ &\subset \text{int}(-\text{barr}(K)) \end{aligned}$$

所以 (2) 式成立。

“ $\Leftarrow$ ”。假如 (2) 式成立, 即:

$$F(K) \cap \text{int}[-\text{barr}(k)] \neq \emptyset$$

则,

$$\begin{aligned} 0 &\in \text{int}(F(K) + \text{barr}(K)) \\ &\subset \text{int}(\text{cone}(F(K)) + \text{barr}(K)) \end{aligned}$$

从而有  $\text{cone}(F(K)) + \text{barr}(K) = H$ , 因而  $[ \text{cone}(F(K)) ]^- \cap [ \text{barr}(K) ]^- = \{0\}$ , 再由  $F(K)^- = [ \text{cone}(F(K)) ]^-$  和  $[ \text{barr}(K) ]^- = K_\infty$  我们有  $F(K)^- \cap K_\infty = \{0\}$ 。

最后由命题 1.1,  $\text{SOL}(K, F)$  是非空有界的。证毕。

注 证明中的文献 [16] 的相关定理可参考文献 [17] 中相关结果。

#### 参考文献:

- [1] Guir O. Existence of interior points and interior paths in nonlinear monotone complementarity problems [J]. Math Oper Res, 1993, 18(1): 128-147
- [2] Kojima M, Megiddo N, Noma T. Homotopy continuation methods for nonlinear complementarity problems [J]. Math Oper Res, 1991, 16(4): 754-774
- [3] Zhao Yunbin, Isac G. Properties of a multi-valued mapping associated with some norm monotone comple-

mentarity problems [J]. SIAM J Control Optim., 2000, 39(2): 571-593

- [4] Karamian S. Complementarity problems over cones with monotone and pseudomonotone maps [J]. J Optim. Theory Appl, 1976, 18(4): 445-454
- [5] Zhao Yunbin, Isac G. Quasi- $P_*(\tau, \alpha, \beta)$ -maps exceptional family of elements and complementarity problems [J]. J Optim. Theory Appl, 2000, 105(1): 213-231
- [6] Ravindran G, Seetharama Gowda M. Regularization of  $P_0$ -function in box variational inequality problems [J]. SIAM J Optim., 2000, 11(3): 748-760
- [7] Mc Linden L. Stable monotone variational inequalities [J]. Math Programming, 1990, 48(2 (Ser B)): 303-338
- [8] Zhao Yunbin, Li Duan. Strict feasibility conditions in nonlinear complementarity problems [J]. J Optim. Theory Appl, 2000, 107(3): 641-664
- [9] He Yiran. Stable pseudomonotone variational inequality in reflexive Banach spaces [J]. J Math Anal Appl, 2007, 330: 352-363
- [10] Facchinei F, Pang Jongshi. Finite-dimensional variational inequalities and complementarity problems [M]. New York: Springer-Verlag, 2003
- [11] He Yiran, Fu Kung Ng. Strict feasibility of generalized complementarity problems [J]. J Austral Math Soc, Ser A., 2006, 81(1): 15-20
- [12] Aubin Jean-Pierre, Frankowska H. Set-valued Analysis [M]. Birkhauser Boston Inc Boston MA, 1990
- [13] Isac G, Kalashnikov V V. Exceptional family of elements, Leray-Schauder alternative, pseudo-monotone operators and complementarity [J]. J Optim. Theory Appl, 2001, 109(1): 69-83
- [14] Aubin Jean-Pierre. Optima and Equilibria [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.
- [15] Kinderlehrer D, Stampacchia G. An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications [M]. New York: Academic Press Inc, 1980
- [16] Lbyd N G. Degree theory [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1978
- [17] 郭大均. 非线性泛函分析: 2版 [M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2003

## Strict Feasibility of Pseudo-monotone Variational Inequality in Hilbert Spaces

LIU Xiaolan

(School of Science, Sichuan University of Science & Engineering, Zigong 643000, China)

**Abstract** This paper proves that solution set of variational inequality being nonempty and bounded is equivalent to the strict feasibility in Hilbert spaces. We provide that the mapping is a compact field and pseudomonotone, and use the homotopy invariance of the topological degree and the excision property of the topological degree. This generalizes some known results from finite dimensional spaces to infinite dimensional spaces.

**Key words** variational inequality, degree theory, strictly feasible, compact field, pseudomonotone mapping.