

线性互补问题的邻域跟踪算法

刘长河^{1 2}

(1 河南科技大学数学与统计学院, 河南 洛阳 471003 2 西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

摘要: 文章把艾文宝的邻域跟踪算法推广到单调线性互补问题(LCP), 由于单调 LCP 的迭代方向不再具有正交性, 因此算法的理论分析变得复杂。证明了算法的迭代复杂性为 $O(\sqrt{nL})$, 并且通过证明对偶间隙的单调性, 使得算法易于执行。

关键词: 单调线性互补问题; 内点方法; 宽邻域; 多项式复杂性

中图分类号: O 221

文献标识码: A

引言

互补问题是从线性规划和非线性规划的推广而形成的, 它与数学规划、变分不等式、不动点问题、广义方程及对策论等有着密切联系。本文中, 我们考虑单调线性互补问题(LCP): 求向量 $(x, s) \in R^n \times R^n$, 满足

$$\begin{cases} s = Mx + q \\ x \geq 0, s \geq 0, x_i s_i = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (1)$$

其中 $q \in R^n$, $M \in R^{n \times n}$ 是半正定矩阵, 即满足 $x^T M x \geq 0 \quad \forall x \in R^n$ 。线性规划与凸二次规划都是单调 LCP 的特例, 参见韩继业等的专著 [1, 第 2 页]。

记 LCP 的严格可行集为

$$F_{++} := \{(x, s) : s = Mx + q, x > 0, s > 0\}$$

内点方法的一个基本假设条件是存在严格可行点, 即 $F_{++} \neq \emptyset$ 。

线性规划的原-对偶内点法是由 Kojima 等 [2] 和 Megiddo [3] 提出, 其基本思想是用牛顿法求解方程 (1) 的扰动方程:

$$\begin{cases} s = Mx + q \\ x \geq 0, s \geq 0, x_i s_i = \mu \quad i = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (2)$$

当严格可行集 F_{++} 非空时, 对任意 $\mu > 0$ 方程 (2) 存在唯一解, 记作 $(x(\mu), s(\mu))$, 并称为 LCP 的 μ -中心。所有 μ -中心的集合称为中心路径, 记为 C , 即

$$C := \{(x, s) \in F_{++} : x_i s_i = \mu, i = 1, 2, \dots, n, \mu > 0\}$$

当 $\mu \rightarrow 0$ 时, 中心路径的极限即是 LCP 的一个最优解。原-对偶内点法用牛顿法求解方程组 (2), 逐渐减小 μ 并使得迭代点列包含于中心路径的某个邻域内, 最终得到满足允许精度的最优解。该方法不但简单易执行, 而且在实际应用中相当有效。然而, 该方法在理论和实践之间仍然存在着矛盾: 实际执行效果好的算法在理论证明上具有较坏的计算复杂性。在文献 [2] 中, 作者提出了基于宽邻域 N_{∞} (在第 1 节中给出定义) 的原-对偶内点算法, 其迭代复杂性证明是 $O(nL)$ 。而在随后的文献 [4] 中, 作者给出了基于窄邻域 N_2 的内点算法, 其迭代复杂性证明是 $O(\sqrt{nL})$ 。但是, 由于迭代点列被限制于一个狭小邻域内, 使得该算法的实际计算效果令人失望。第一个具有实际应用价值且有 $O(\sqrt{nL})$ 迭代复杂性的内点算法是 Mizuno-Todd-Ye 预估-校正算法 [5], 但该算法仍然基于窄邻域 N_2 。Huang 和 Ye [6] 利用高阶校正方法, 给出了宽邻域 N_{∞} 的计算复杂性为 $O(n^{3/2}L)$ 的原-对偶路径跟踪算法。Peng 等 [7] 利用自-正则函数定义的宽邻域, 提出了一个预估-校正内点算法, 并证明其计算复杂性是 $O(\sqrt{nb}nL)$ 。Ai 在 [8] 中针对线性规划提出了一个新的宽邻域, 作者设法让所有的迭代点列都跟踪宽邻域 N_{∞} 。但不一定属于这个宽邻域。运用这一策略加上引入向量 v 使得作者给出的宽邻域算法具有最好的 $O(\sqrt{nL})$ 迭代复杂性和二次收敛速度。

本文把 [8]中的算法推广到单调线性互补问题, 由于搜索方向 Δx 和 Δs 不再具有正交性, 这使得算法的理论分析要比线性规划复杂。

本文中的记法, e 表示分量全为一的列向量, $\|\cdot\|$ 表示向量的 L_p -范数, $\|\cdot\|$ 表示向量的 2-范数。对于向量 $x, s \in R^n, xs$ 表示分量乘积, 类似的方式记 $(xs)^{-0.5}$ 等。对于向量 $a \in R^n$, 记 $a^+ = \max\{a, 0\}, a^- = \min\{a, 0\}$ 。

1 邻域跟踪算法

内点算法中通常使用的窄邻域为:

$$N_2(\beta) = \{(x, s) \in F_{++}: \|xs - \mu e\| \leq \beta \mu\},$$

其中 $\beta \in (0, 1)$ 是给定常数, $\mu = x^T s / n$ 。宽邻域:

$$N_\infty(1 - \tau) = \{(x, s) \in F_{++}: xs \geq \tau \mu e\},$$

其中 $\tau \in (0, 1), \mu = x^T s / n$ 。A 在 [8]中给出了一个新邻域:

$$N(\tau, \beta) = \{(x, s) \in F_{++}: \|(\tau \mu e - xs)^+\|_1 \leq \beta \tau \mu\},$$

其中 $\tau, \beta \in (0, 1), \mu = x^T s / n$ 。容易证明关系式:

$$N_2(\tau) \subseteq N_\infty(1 - \tau) \subseteq N(\tau, \beta), \forall \tau, \beta \in (0, 1)$$

因此, 邻域 $N(\tau, \beta)$ 甚至比宽邻域 $N_\infty(1 - \tau)$ 更宽。

设当前迭代点 $(x, s) \in N(\tau, \beta)$, 定义向量:

$$z = (\tau \mu e - xs)^+ + \lambda (\tau \mu e - xs)^- + xs$$

其中 $\lambda = \|(\tau \mu e - xs)^+\|_1 / \|(\tau \mu e - xs)^-\|_1$ 。

求解 LCP 的牛顿方向 (仿射方向) $(\Delta x^a, \Delta s^a)$ 为:

$$\begin{cases} \Delta s^a = M \Delta x^a \\ s \Delta x^a + x \Delta s^a = -xs \end{cases} \quad (3)$$

定义一个与向量 v 相关的方向 $(\Delta x^v, \Delta s^v)$ 满足下面线性方程组:

$$\begin{cases} \Delta s^v = M \Delta x^v \\ s \Delta x^v + x \Delta s^v = v \end{cases} \quad (4)$$

则新的迭代点为

$$\begin{aligned} (x(t), s(t)) &= (x, s) + (\Delta x(t), \Delta s(t)) \\ &= (x, s) + (\Delta x^a, \Delta s^a) + t(\Delta x^v, \Delta s^v) \end{aligned}$$

其中, t 由线性搜索确定:

$$m \min_{0 \leq t \leq 1} \{x(t)^T s(t): (x(t), s(t)) \in N(\beta, \tau)\} \quad (5)$$

算法输入参数: $\varepsilon > 0, \tau, \beta \in (0, 1)$; 取初始值 $(x^0, s^0) \in N(\tau, \beta)$; 令 $\mu_0 = (x^0)^T s^0 / n$ 。

步骤 0 置 $k = 0$ 。

步骤 1 若 $(x^k)^T s^k \leq \varepsilon$ 则停。

步骤 2 由方程 (3) 和 (4) 计算 $(\Delta x^a, \Delta s^a)$ 和 $(\Delta x^v, \Delta s^v)$ 。令 $x(t) = x + \Delta x + t \Delta x^v, s(t) = s + \Delta s + t \Delta s^v$, 其中, t 由线性搜索 (5) 确定。

步骤 3 令 $(x^{k+1}, s^{k+1}) = (x(t), s(t)), \mu_{k+1} = (x^{k+1})^T s^{k+1} / n$ 。置 $k = k + 1$ 转步骤 1。

注 (1) 当 $M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ -A^T & 0 \end{bmatrix}$ 时, 线性互补问题即为

线性规划问题 [1, 9]。

(2) 首先我们要说明算法的合理性。由 M 的半正定性和 $(x, s) > 0$ 可知方程组 (3) 和 (4) 的系数矩阵是非奇异的, 故存在唯一解 [1, 定理 4.1.5]。下面我们通过一些引理说明线性搜索 (5) 中存在 $t \in (0, 1)$, 满足 $(x(t), s(t)) \in N(\beta, \tau)$ 。

引理 1^[8] 设 $(x, s) \in N(\tau, \beta)$, 则下列不等式成立:

- (i) $v \geq \tau \mu e$
- (ii) $\|\lambda(\tau \mu e - xs)^-\|_1 = \|(\tau \mu e - xs)^+\|_1$
- (iii) 当 $\beta \leq 1/3$ 时, $\|(xs)^{-0.5}(v - xs)\|^2 \leq \frac{5}{6} \beta \tau \mu$ 。

由方程 (3), (4) 和 M 的半正定性易得下面引理。

引理 2 设 $(x, s) \in N(\tau, \beta)$, 则下面结论成立:

$$x(t) s(t) = w + \Delta x(t) \Delta s(t), \mu(t) = \frac{1}{n} x(t)^T s(t) =$$

$$\mu + \frac{1}{n} \Delta x(t)^T \Delta s(t) \geq t \mu$$

下面的引理与迭代点的可行性有关。

引理 3^[8] 若 $x(t) s(t) > 0$ 则 $(x(t), s(t)) > 0$ 。

由引理 3 可知

$$(x(t), s(t)) \in N(\beta, \tau) \Leftrightarrow \|(\tau \mu(t) e - x(t) s(t))^+\|_1 \leq \beta \tau \mu(t)$$

引理 4^[9] 设 $p, q \in R^n, p^T q \geq 0$ 令 $r = p + q$ 则下面不等式成立:

$$\|(pq)^-\|_1 \leq \|(pq)^+\|_1 \leq \frac{1}{4} \|r\|^2$$

下面的重要引理在后面的分析中会多次用到。

引理 5 设 $(x, s) \in N(\tau, \beta)$, 参数 $\beta \leq 1/3$ 。若 $1 - 0.5 \sqrt{\beta \tau} / n \leq t \leq 1$, 则下面不等式成立:

$$\|(\Delta x(t) \Delta s(t))-\|_1 \leq \|(\Delta x(t) \Delta s(t))^+\|_1 \leq \frac{1}{2} \beta \tau \mu \quad (6)$$

证明 在 (3) 和 (4) 的第二式两边同乘以 $(xs)^{-0.5}$, 并记

$$p = x^{-0.5} s^{0.5} \Delta x(t), q = x^{0.5} s^{-0.5} \Delta s(t), r = (xs)^{-0.5} (w - xs),$$

由引理 4 得

$$\begin{aligned} &\|(\Delta x(t) \Delta s(t))-\|_1 \\ &\leq \|(\Delta x(t) \Delta s(t))^+\|_1 \\ &\leq \frac{1}{4} \|(xs)^{-0.5} (w - xs)\|^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left(t \|(xs)^{-0.5} (v - xs)\| + (1 - t) \|\sqrt{xs}\| \right)^2 \end{aligned}$$

由引理 1 (iii) 和 $1 - 0.5 \sqrt{\beta \tau} / n \leq t \leq 1$ 即得

$$\begin{aligned} \|(\Delta x(t)\Delta s(t))^+\|_1 &\leq \frac{1}{4}(t\sqrt{5\beta\tau\mu/6} + (1-t)\sqrt{n\mu})^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\beta\tau\mu \end{aligned}$$

引理 6 设 $(x, s) \in N(\tau, \beta)$, $\tau \leq 1/4$, $\beta \leq 1/3$.

若 $1 - 0.5\sqrt{\beta\tau/n} \leq t \leq 1$ 则

$$\|(\tau\mu(t)e - x(t)s(t))^+\|_1 \leq \beta\tau\mu(t)$$

证明 由引理 1(i)和引理 2可得

$$\begin{aligned} &\|(\tau\mu(t)e - x(t)s(t))^+\|_1 \\ &= \left\| \left[t\tau\mu e - x(t)s(t) + \tau \frac{\Delta x(t)^T \Delta s(t)}{n} \right]^+ \right\|_1 \\ &\leq \| (t\tau\mu e - x(t)s(t))^+ \|_1 + \tau \|\Delta x(t)^T \Delta s(t)\| \\ &\leq \|(\Delta x(t)\Delta s(t))^- \|_1 + \tau \|(\Delta x(t)\Delta s(t))^+ \|_1 \end{aligned}$$

又由(6)式和 $\tau \leq 1/4$, $1 - 0.5\sqrt{\beta\tau/n} \leq t \leq 1$ 及引理 2得

$$\|(\tau\mu(t)e - x(t)s(t))^+\|_1 \leq \frac{5}{8}\beta\tau\mu \leq t\beta\tau\mu \leq \beta\tau\mu(t)$$

2 算法的执行及多项式复杂性

定理 1 设 $\tau \leq 1/4$, $\beta \leq 1/3$ 则算法最多需要

$O(\sqrt{n} \log \frac{(x^0)^T s^0}{\varepsilon})$ 次迭代后终止。

证明 当 $t = 1 - 0.5\sqrt{\beta\tau/n}$ 时,由引理 2和引理 5可得

$$\begin{aligned} \mu(t) &\leq \mu + \frac{1}{n} \|(\Delta x(t)\Delta s(t))^+\|_1 \\ &\leq (1 - 0.5\sqrt{\beta\tau/n})\mu + \frac{1}{2n}\beta\tau\mu \\ &\leq (1 - \frac{1}{3}\sqrt{\beta\tau/n})\mu \end{aligned}$$

因此,线性搜索(5)产生至少和 $\mu(t)$ 相同的下降量,故

$$\mu_k \leq (1 - \frac{1}{3}\sqrt{\beta\tau/n})^k \mu_0$$

当 $k \geq \frac{3}{\sqrt{\beta\tau}} \sqrt{n} \log \frac{(x^0)^T s^0}{\varepsilon}$ 时

$$\begin{aligned} (x^k)^T s^k &\leq (1 - \frac{1}{3}\sqrt{\beta\tau/n})^k (x^0)^T s^0 \\ &= (x^0)^T s^0 e^{k \log(1 - \frac{1}{3}\sqrt{\beta\tau/n})} \\ &\leq (x^0)^T s^0 e^{-\frac{k}{3}\sqrt{\beta\tau/n}} \\ &\leq \varepsilon \end{aligned}$$

所以,算法最多需要 $\left\lceil \frac{3}{\sqrt{\beta\tau}} \sqrt{n} \log \frac{(x^0)^T s^0}{\varepsilon} \right\rceil$ 次迭代后终止。

定理 2 设 $(x, s) \in N(\tau, \beta)$, $\beta \leq 1/3$. 则

$x(t)^T s(t)$ 在 $t \in [0, 1]$ 上是单增函数。

证明 容易验证

$$x(t)^T s(t) = tx^T s + (\Delta x^a)^T \Delta s^a$$

$$+ t((\Delta x^a)^T \Delta s^a + (\Delta s^a)^T \Delta x^a) + t^2(\Delta x^v)^T \Delta s^v$$

当 $t \in [0, 1]$ 时,由 M 的半正定性可得

$$\begin{aligned} &\frac{d(x(t)^T s(t))}{dt} \\ &= x^T s + (\Delta x^a)^T \Delta s^a + (\Delta s^a)^T \Delta x^a + 2t(\Delta x^v)^T \Delta s^v \\ &= x^T s + (\Delta x^a + \Delta x^v)^T (\Delta s^a + \Delta s^v) \\ &\quad - (\Delta x^a)^T \Delta s^a - (1-2t)(\Delta x^v)^T \Delta s^v \\ &\geq n\mu - (\Delta x^a)^T \Delta s^a - |1-2t|(\Delta x^v)^T \Delta s^v \\ &\geq n\mu - \|(\Delta x^a \Delta s^a)^+\|_1 - \|(\Delta x^v \Delta s^v)^+\|_1 \end{aligned} \tag{7}$$

由引理 5的证明可得

$$\|(\Delta x^a \Delta s^a)^+\|_1 \leq \frac{1}{4} \|(xs)^{-0.5}(s\Delta x^a + x\Delta s^a)\|^2 = \frac{1}{4}n\mu \tag{8}$$

$$\|(\Delta x^v \Delta s^v)^+\|_1 \leq \frac{1}{4} \|(xs)^{-0.5}(s\Delta x^v + x\Delta s^v)\|^2$$

$$= \frac{1}{4} \|(xs)^{-0.5}(v-x)s + \sqrt{xs}\|^2$$

又由引理 1(iii)可得

$$\begin{aligned} \|(\Delta x^v \Delta s^v)^+\|_1 &\leq \frac{1}{4} \left(\|(xs)^{-0.5}(v-x)s\| + \|\sqrt{xs}\| \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{4} \left(\sqrt{5\beta\tau\mu/6} + \sqrt{n\mu} \right)^2 \\ &\leq \frac{2}{5}n\mu \end{aligned} \tag{9}$$

把(8)和(9)式带入(7)式得

$$\frac{d(x(t)^T s(t))}{dt} \geq n\mu - \frac{1}{4}n\mu - \frac{2}{5}n\mu > 0$$

故 $x(t)^T s(t)$ 在 $t \in [0, 1]$ 上是单增函数。

由定理 2 我们可以把线性搜索(5)简化为

$$m_{0 \leq t \leq 1} \{ t(x(t), s(t)) \in N(\beta, \tau) \} \tag{10}$$

由引理 6可知最优解满足 $t \leq 1 - 0.5\sqrt{\beta\tau/n}$, 因此我们可以在区间 $[0, 1 - 0.5\sqrt{\beta\tau/n}]$ 上使用简单而又有效的二分法近似求解子问题(10),由定理 1的证明易得下面推论。

推论 1 设 $\tau \leq 1/4$, $\beta \leq 1/3$. 若 t 为(10)的近似最优解,且满足 $t \leq 1 - 0.5\sqrt{\beta\tau/n}$ 则算法的迭代复杂性仍为 $O(\sqrt{n} \log \frac{(x^0)^T s^0}{\varepsilon})$ 。

3 结束语

本文把文献[8]中线性规划的邻域跟踪算法推广到单调 LCP,由于单调 LCP的迭代方向 Δx 和 Δs 不再具有正交性,因此算法的理论分析比[8]复杂。通过一些重要引理我们证明了算法的迭代复杂性为 $O(\sqrt{n} \log \frac{(x^0)^T s^0}{\varepsilon})$, 并且通过证明对偶间隙 $x(t)^T s(t)$ 关于 t 的单调性,使得算法易于执行,并且不改变其迭代复杂性。

参考文献:

- [1] 韩继业, 修乃华, 戚厚铎. 非线性互补理论与算法 [M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.
- [2] Kojima M, Mizuno S, Yoshise A. A primal-dual interior point algorithm for linear programming [C]. N. Megiddo. In Progress in Mathematical Programming Interior Point and Related Methods New York Springer-Verlag 1989. 29-47.
- [3] Megiddo N. Pathways to the optimal set in linear programming [C]. N. Megiddo. In Progress in Mathematical Programming Interior Point and Related Methods New York Springer-Verlag 1989. 131-158.
- [4] Kojima M, Mizuno S, Yoshise A. A polynomial-time algorithm for a class of linear complementarity problems [J]. Math Program., 1989, 44: 1-26.
- [5] Mizuno S, Todd M, Ye Y. On adaptive step primal dual interior point algorithms for linear programming [J]. Math Oper Res, 1993, 18: 964-981.
- [6] Hung P, Ye Y. An asymptotical $O(\sqrt{nL})$ iteration path following linear programming algorithm that use wide neighborhoods [J]. SIAM J Optim., 1996, 6: 570-586.
- [7] Peng JM, Terlaky T, Zhao Y B. A Predictor-Corrector Algorithm for Linear Optimization Based on a Specific Self Regular Proximity Function [J]. SIAM J Optim., 2005, 15: 1105-1127.
- [8] 艾文宝. 线性规划的邻域跟踪算法 [J]. 中国科学: A 辑, 2004, 34(1): 40-47.
- [9] Ai W, Zhang S. An $O(\sqrt{nL})$ iteration primal dual path following method based on wide neighborhoods and large updates for monotone LCP [J]. SIAM J Optim., 2005, 16(2): 400-417.

Neighborhood-following Algorithms for Monotone LCP

LIU Chang-he^{1,2}

(1. School of Mathematics and Statistics, Henan University of Science and Technology, Luoyang 471003, China

2. School of Science, Xi'an University, Xi'an 710071, China)

Abstract This paper extends Ai's neighborhood-following algorithms for linear programming to monotone linear complementarity problems (LCP). Since monotone LCP is the generalization of linear programming, the analysis is more difficult than the one in the linear programming case. The $O(\sqrt{nL})$ iteration complexity is given. After proving the monotone property of the dual gap, the proposed algorithm can be specified into easy implementable variants with given parameters.

Key words monotone linear complementarity problems, interior point methods, wide neighborhoods, polynomial time iteration complexity